

MEMOIRES

SUR

DIFFÉRENS SUJETS

DE

MATHEMATIQUES.

Par M. DIDEROT.

Amoto quæramus seria ludo. Horat.





A PARIS, RUE SAINT JACQUES,

Chez { DURAND, Libraire, au Griffon. / PISSOT, Quay des Augustins, à la Sagesse.

M. DCC. XLVIII.

Avec Approbation & Privilege du Roy.









A

MADAME DE P***

ADAME,

Je n'opposerai point à vos reproches l'exemple de Rabelais, de

Montagne, de la Mothe-le-Vayer; de Swift, & de quelques autres que je pourrois nommer, qui ont attaqué de la maniere la plus cynique les ridicules de leurs tems, & conservé le titre de Sages.

Je veux que le scandale cesse, & sans perdre le tems en apologie, j'abandonne la marotte & les grelots, pour ne les reprendre jamais, & je reviens à Socrate.

Sachez cependant qu'entre tous les avantages qu'il vous a plû d'attacher à ce retour, celui de vous en consacrer les premiers fruits est le seul qui m'ait flaté.

J'ai pensé qu'ils ne seroient pas indignes du Public, s'ils étoient dignes de vous.

Puissiez-vous donc les agréer & voir avec indulgence votre nom à la tête d'un Ouvrage, triste à la vérité, mais où l'on traite des sujets qui vous sont familiers, & d'une façon qui ne vous est pas tout à fait étrangére.

Ce n'est, MADAME, *ni à votre esprit ni à vos charmes; mais c'est seulement à vos talens & à vos connoissances que je me suis proposé de rendre hommage pour cette fois.*

J'ai l'honneur d'être avec un profond respect,

MADAME,

Votre très-humble & très-obéissant Serviteur,
DIDEROT.

AVERTISSEMENT.

LES Mémoires que je présente au Public, en très-petit nombre, sont presque tous sur des sujets intéressans. J'ai désiré de les traiter d'une façon qui fut à la portée de la plûpart des Lecteurs ; mais après quelques efforts inutiles, il en a fallu venir aux calculs, & il ne m'est resté d'autre ressource que de placer mes x & mes y, de maniere que ceux qui n'ont aucune connoissance de l'Algébre, pussent les omettre, sans que ni le fil ni la clarté du discours en souffrissent. C'est ce que j'ai exécuté assez heureusement dans le premier Mémoire. La

chose étoit impossible dans le second. On peut lire, sans presqu'aucune teinture de Mathématique, le troisiéme & le quatriéme. Le cinquiéme s'est trouvé dans le cas du second. Je n'aurois point eu cet Avertissement à faire, si les Personnes, entre les mains de qui ce Livre pourra tomber, étoient toutes aussi instruites que celle qui m'a permis de le lui dédier : ses Ouvrages prouveront incessamment, que l'éloge que je fais ici de son esprit & de ses connoissances, est dans l'exacte vérité.

TABLE

DES MEMOIRES.

PREMIER MEMOIRE.

SECOND MEMOIRE.

TROISIE'ME MEMOIRE.

Fin de la Table.

E R R A T A.

Page 29. *ligne* 9. largeur, *lisez* longueur.

Page 80. *ligne* 6. celles, *lisez* celle.

APPROBATION.

J'Ay lu, par ordre de Monseigneur le Chancelier, un Manuscrit comprenant des *Mémoires sur différens sujets de Mathématiques*, *Acoustique*, *Méchanique & Géométrie*, qui m'ont paru traités avec beaucoup de sagacité. A la Fere le premier Mars 1748.

Signé, BELIDOR.

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navatre : A nos amés & feaux Conseillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conseil, Prevôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra, SALUT : Notre bien amé LAURENT DURAND, Libraire à Paris, Nous a fait exposer qu'il désireroit faire imprimer & donner au Public un Ouvrage qui a pour titre : *Mémoires sur différens sujets de Mathematique*, *Acoustique*. *Méchanique & Géométrie*, s'il Nous plaisoit lui accorder nos Lettres de Privilége pour ce nécessaires. A CES CAUSES, voulant favorablement traiter l'Exposant, Nous lui avons permis & permettons par ces Présentes de faire imprimer ledit Ouvrage en un ou plusieurs Volumes, & autant de fois que bon lui semblera, & de le vendre, faire vendre, & débiter par tout notre Royaume, pendant le tems de neuf années consécutives, à compter du jour de la date des Présentes; faisons défenses à toutes personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéïssance ; comme aussi à tous Libraires & Imprimeurs, d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter, ni contrefaire ledit Ouvrage, ni d'en faire aucuns Extraits, sous quelque prétexte que ce soit, d'augmentation, correction, changemens, ou autres, sans la permission expresse & par écrit dudit Exposant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de 3000 liv. d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, l'autre tiers audit Exposant, ou à celui qui aura droit de lui, & de tous dépens, dommages & intérêts. A la charge que ces Présentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Libraires &

Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date d'icelles; que l'impression de cet Ouvrage sera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en bon papier & beau caractere, conformément à la feuille imprimée, attachée pour modéle sous le contre-scel des Présentes; que l'Impétrant se conformera en tout aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725; qu'avant de les exposer en vente, le Manuscrit qui aura servi de copie à l'impression dudit Ouvrage sera remis dans le même état où l'Approbation y aura été donnée ès mains de notre très-cher & féal Chevalier le sieur Daguesseau, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres, & qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notredit très-cher & féal Chevalier le sieur Daguesseau, Chancelier de France, le tout à peine de nullité des présentes. Du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire joüir ledit Exposant ou ses ayant cause, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchemens. Voulons que la copie desdites Présentes, qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin dudit Ouvrage, soit tenue pour duement signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conseillers & Sécrétaires, foi soit ajoutée comme à l'original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles tous Actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Chartre Normande, & Lettres à ce contraires; CAR tel est notre plaisir. DONNE' à Versailles le 10 jour du mois de May, l'an de grace 1748, & de notre Regne le trente-troisiéme. Par le Roi en son Conseil.

SAINSON.

Registré sur le Registre 11 de la Chambre Royale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 947, fol. 837, conformément aux anciens Réglemens confirmés par celui du 28 Février 1723. A Paris le 26 May 1748.

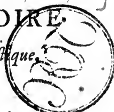
G. CAVELIER, *Syndic.*

PREMIER



N. Blakey Londinensis inv. D. Sornique Sculp.

PREMIER MÉMOIRE.



Principes généraux d'Acoustique.

I.



NE considérer que les sons, leur véhicule & la conformation des organes, on croiroit qu'un Adagio de Michel, une Gigue de Corelli, une Ouverture de Rameau, une Chaconne de Lulli, auroient été il y a deux mille ans comme aujourd'hui, & de-

vroient être au fond de la Tartarie comme à Paris, des pieces de Musique admirables. Cependant rien de plus contraire à l'expérience. Si nous détestons la Musique des Barbares, les Barbares n'ont guéres de goût pour la nôtre; & en admettant toutes les merveilles qu'on raconte de la Musique des Anciens, il est à présumer que nos plus beaux Concerts auroient été fort insipides pour eux. Mais sans exercer la crédulité du Lecteur, en sortant de notre âge & de notre voisinage; les Italiens ne font pas grand cas de la Musique Françoise, & il n'y a pas long-tems que les François avoient un mépris souverain pour la Musique Italienne. Quoi donc, la Musique seroit-elle une de ces choses soumises aux caprices des peuples, à la diversité des lieux & à la révolution des tems?

On s'accorde cependant en un

point ; c'eſt que, tout étant égal d'ailleurs, l'octave, la quinte, la quarte, les tierces & les ſixtes employées dans l'harmonie, affectent l'oreille plus agréablement que les ſeptiémes, les ſecondes, le triton & les autres intervalles que nous appellons diſſonans. Cela poſé, je raiſonne ainſi.

Si ce conſentement unanime avoit un fondement réel dans la nature ; ſi en effet tous les ſons n'étoient pas également propres à former des conſonances agréables, pourroit-on regarder la ſucceſſion des ſons & des conſonances, comme arbitraire ? Quoi, les ſons plairoient à l'oreille en ſe ſuccedant indiſtinctement, tandis qu'il y auroit un choix délicat à faire pour arriver au même but, en les uniſſant. Cela n'eſt pas vraiſemblable.

I I.

Dans toutes les conjonctures où

nos ſens ſont intereſſés, il faut avoir égard à l'objet, à l'état du ſens, à l'image ou à l'impreſſion tranſmiſe à l'eſprit, à la condition de l'eſprit dans le moment qu'il la reçoit & au jugement qu'il en porte.

L'état de l'objet eſt quelquefois indépendant de moi, mais je connoîtrai toujours ſi cet état eſt bon ou mauvais, par l'uſage auquel l'objet eſt deſtiné. L'organe peut être pur ou vitié. L'image ou l'impreſſion ſuit la condition de l'organe. L'eſprit eſt ſujet à des révolutions; & de-là naît une foule de jugemens divers.

Qui prendrai-je pour guide? A qui m'en rapporterai-je? Eſt-ce à vous? Eſt-ce à moi? C'eſt à celui qui bien inſtruit de la deſtination de l'objet, ne riſque pas de ſe tromper ſur ſa condition; qui a l'organe pur; qui jouit d'un eſprit ſain, & en qui les images des objets ne ſont point défigurées par les ſens.

Je ne m'arrêterai point à l'application de ces principes à la ſcience des ſons; elle eſt trop facile à faire. J'obſerverai ſeulement en général qu'un objet eſt plus ou moins compliqué, ſelon qu'il offre à l'eſprit plus ou moins de rapports à ſaiſir & à combiner en même-tems, & ſelon que ces rapports ſont plus ou moins éloignés.

Nous démontrerons dans la ſuite que le plaiſir muſical conſiſte dans la perception des rapports des ſons. D'où il s'enſuit évidemment, qu'il ſera d'autant plus difficile de juger d'une piece de Muſique, qu'elle ſera plus chargée de ces rapports & que ces rapports ſeront plus éloignés.

Quand on ſçaura comment l'oreille eſtime les intervalles des ſons, on ne balancera point à prononcer qu'elle appercevra plus facilement le rapport de deux ſons qui ſont l'un à l'autre comme 1 à 2, que s'ils étoient entr'eux

comme 18 à 19. Cela posé, les rapports d'une suite de tons requereroient plus de talent, d'exercice & d'attention pour être apperçus & conséquemment écoutés avec plaisir, qu'il n'en faudroit pour chacun de ces rapports pris en particulier. Autre chose est, estimer les rapports des sons qui se succedent dans une piece; autre chose, combiner ces rapports entr'eux, les comparer, les distinguer tous offerts en même tems dans une harmonie, & conférer les parties successives de cette harmonie les unes avec les autres. Tel peut embrasser dans sa tête toutes les parties d'un édifice immense; tel autre saisit à peine le rapport d'une colonne avec son piedestal.

Si donc la mélodie & l'harmonie multiplient dans un ouvrage les rapports, desorte qu'il n'y ait qu'une oreille des mieux exercées qui puisse les saisir tous, elle ne sera goûtée que

d'un petit nombre, de ceux qui auront dans l'organe une aptitude, un discernement proportionné à la multitude de ces rapports; & c'est ainsi qu'il arrivera que le chant des Barbares sera trop simple pour nous, & le notre trop composé pour eux.

L'expérience vient à l'appui de mes idées. On nous assure qu'un Paysan, doué d'une oreille délicate, ne pût supporter l'ensemble d'un excellent duo de Flutes dont les parties séparées l'avoient enchanté tour à tour.

La Musique a donc des principes invariables & une théorie. C'est une vérité que les Anciens ont connuë. Pithagore posa les premiers fondemens de la science des sons. Il ignora comment l'oreille apprétie les rapports; il se trompa même sur leurs limites, mais il découvrit que leur perception étoit la source du plaisir musical.

Ariſtoxene, ne rencontrant point dans la doctrine de Pithagore les vrais principes de l'harmonie, regarda comme fauſſe une méthode qui n'étoit que défectueuſe, & ſans s'occuper à la rectifier, bannit de la compoſition, les nombres & le calcul & s'en remit à l'oreille ſeule du choix & de la ſucceſſion des conſonances. Enſorte qu'on peut dire que Pithagore ſe trompa en donnant trop à ſes proportions, & Ariſtoxene, en les réduiſant à rien. Si Pithagore, après avoir compris que le plaiſir qui naît de l'harmonie, conſiſte dans la perception des rapports des ſons, eût conſulté l'expérience pour fixer les limites de ces rapports, Ariſtoxene eût été ſatisfait. Celui-ci ne pouſſa point toutefois le ſepticiſme muſical, juſqu'à traiter l'harmonie, de ſcience arbitraire.

III.

La Musique a le son pour objet ; & le plaisir de l'oreille est sa fin. Que le son existe dans l'air, c'est un fait constaté par le raisonnement & par l'expérience. Un corps sonore ne communique avec nos oreilles, que par l'air qui les environne ; où prendrions-nous donc le véhicule du son, si ce fluide ne l'étoit pas ? Car il n'en est pas de l'ouïe, comme de l'odorat & de la vûe ; & ce ne sont pas des molécules échappées du corps sonore qui viennent frapper nos oreilles. Le son d'une cloche renfermée dans la machine pneumatique s'affoiblit à mesure qu'on pompe l'air, & s'éteint quand le récipient est vuide.

L'air est donc le véhicule du son. Mais quelle est l'altération qui survient dans ce milieu à l'occasion du corps sonore? C'est ce que nous allons ex-

poser. Si vous pincez une corde d'inſtrument, vous y remarquerez un mouvement qui la fait aller & venir avec viteſſe en delà & en deçà de ſon état de repos, & ce mouvement ſera d'autant plus ſenſible que la corde ſera plus groſſe. Appliquez votre main ſur une cloche en volée & vous la ſentirez frémir. La corde vient-elle à ſe détendre ou la cloche à ſe fendre ? Plus de frémiſſement; plus de ſon.

L'air n'agit donc ſur nos oreilles qu'en conſéquence de ce frémiſſement. C'eſt donc ce frémiſſement qui le modifie. Mais comment ? le voici. En vertu des vibrations du corps ſonore, l'air environnant en prend & exerce de ſemblables ſur ſes particules les plus voiſines, celles-ci ſur d'autres qui leur ſont contiguës, & ainſi de ſuite, avec cette différence ſeule, que l'action des particules les unes ſur les autres eſt d'autant plus grande,

que la diſtance au corps ſonore eſt plus petite.

L'air mis en ondulations par le corps ſonore vient frapper le tympan. Le tympan eſt une membrane tenduë au fond de l'oreille, comme la peau ſur un tambour; & c'eſt de-là que cette membrane a pris ſon nom. L'air agit ſur elle & lui communique des pulſations qu'elle tranſmet aux nerſs auditifs. C'eſt ainſi que ſe produit la ſenſation que nous appellons ſon.

Le ſon par rapport à nous n'eſt donc autre choſe qu'une ſenſation excitée à l'occaſion des pulſations ſucceſſives que le tympan reçoit de l'air ondulant qui remplit nos oreilles.

Il ſuit de-là que la propagation du ſon n'eſt pas inſtantanée. Le ſon ne parcourt un eſpace déterminé que dans un tems fini. Mais ce que je regarde comme un des phénomenes de la nature les plus inexplicables, c'eſt que

ſon mouvement eſt uniforme. Fort ou foible, grave ou aigu, ſa viteſſe eſt conſtante. Les viciſſitudes que la différence des lieux & des températures peut cauſer dans la danſité de l'air & la force élaſtique de ſes molécules, augmenteront ou diminueront la viteſſe du ſon ; mais ſi l'on trouve qu'il parcourt *m* de pieds dans une ſeconde ; quoique *m* puiſſe varier d'un inſtant à l'autre, il parcourera 2*m* de pieds en 2 ſecondes, 3*m* de pieds en 3 ſecondes, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce qu'il ſe faſſe quelque révolution dans l'air.

Si l'on s'en rapporte à Halley & à Flamſtead, le ſon parcourt en Angleterre 1070 pieds de France en une ſeconde de tems. Sur la parole du Pere Merſene & de Gaſſendi, on aſſuroit, il n'y a pas encore long-tems, que le vent favorable n'acceleroit point le ſon, & qu'il n'étoit point retardé par un vent contraire. Mais depuis les ex-

périences de Derham & celles que l'Académie a faites il y a quelques années, cela paſſe pour une erreur.

I V.

Après avoir parlé du ſon en général, il eſt naturel de paſſer aux eſpeces de ſon. Les cauſes nous en indiquent une diſtribution fort ſimple.

Le ſon naît ou des vibrations d'un corps tel que les cordes & les cloches ; ou de la dilatation ſubite d'un air comprimé, tel que le bruit des Fuſils, des Canons, du Tonnerre & des corps agités ou lancés dans l'air ; ou de l'inſpiration dans un inſtrument à vent, tel qu'une Flute, un Baſſon, un Hautbois, une Trompette.

Les cordes tendues, ſoit de léton, ſoit à boyaux, frémiſſent, oſcillent, lorſqu'elles ſont frappées. Le coup qu'on leur donne avec une touche ou un archet, les écarte de l'état de re-

pos ; elles paſſent & repaſſent en delà & en deçà de la ligne droite, d'un mouvement accéléré qui ne leur permet de s'y fixer, que quand il s'éteint par la réſiſtance qui ralentit peu à peu les vibrations.

Connoiſſant la longueur d'une corde, ſon poids avec celui qui la tend, on détermine le nombre des vibrations qu'elle fait dans un tems donné. M. Taylor, contemporain de Newton, tenta le premier la ſolution de ce Problême. Ayant à déduire de ſes formules tout ce qui concerne les cordes, je ne peus me diſpenſer d'indiquer la route qu'il faut ſuivre pour les obtenir & les raiſons qu'on a de les regarder comme exactes, quoique la premiere de ſes propoſitions ſoit fauſſe, comme nous aurons en même tems l'occaſion de l'obſerver.

La ſolution de M. de Taylor eſt fondée ſur deux faits d'expérience ;

l'un que la plus grande excursion de la corde au delà de la ligne de repos est fort petite relativement à sa longueur; & l'autre que tous ses points parviennent en même tems à la ligne de repos. On peut s'assurer par ses yeux de la premiere de ces suppositions, & consulter les élémens de Physique de Gravesande & l'harmonie universelle du Pere Mersene sur la seconde.

LEMME I.

Si les ordonnées SB, SP, (Fig. 1.) *de deux courbes* AB, AP, *dont l'abscisse est commune, ont entr'elles une raison donnée; les courbures au sommet des ordonnées seront entr'elles comme les ordonnées, lorsque les ordonnées seront infiniment petites, & les courbes sur le point de coincider avec leur axe* AS.

DEMONSTRATION.

Les ordonnées étant en raiſon donnée, les tangentes aux points B & P concoureront en un même point T de l'axe AS. Car menant Kh infiniment proche de SB, on aura par hypotheſe $ql. rh :: SP. SB$, ou $ql. SP :: rh. SB$; & par la ſimilitude des triangles, $ql. SP :: qP$ ou $SK. ST$, & $rh. SB :: rB$ ou $SK. St$. Donc $SK. ST :: SK. St$. Donc $ST = St$.

On a donc $sC. SB :: sc. SP$. Mais par hypotheſe $SB. SP :: sb. sp$. Donc $sC. sc :: sb. sp$, & $sC - sb. sc - sp :: bC. pc :: SB. SP$.

Soient maintenant les ordonnées sb, SB infiniment proches; bC & pc pourront être regardées comme la meſure des angles de contact, lorſque SB & SP décroiſſant à l'infini, les courbes ſeront ſur le point de coincider avec l'axe As. Car dans ce cas Bb ſe rectifiant

rectifiant devient égale à Pp; de plus les angles de contact sont entr'eux comme $\frac{bC}{Bb}$ à $\frac{pc}{Pp}$.

Car (*Fig.* 2.) l'angle APB est à l'angle BPC ou EPF comme AB à BC ou comme $\frac{AB}{AP}$ à $\frac{BC}{AP}$. Mais $\frac{BC}{AP} = \frac{EF}{EP}$. Donc l'angle APB est à l'angle EPF comme $\frac{AB}{AP}$ à $\frac{EF}{EP}$.

Donc les courbures en B & P (*Fig.* 1.) étant proportionnelles aux angles de contact, seront ici comme $\frac{bC}{Bb}$ à $\frac{pc}{Pp}$. C'est-à-dire, à cause de $Bb = Pp$, comme bC à pc, ou comme SB à SP. Ce qu'il falloit démontrer.

LEMME II.

La force accélératrice d'un point quelconque P, (Fig. 3.) *d'un fil élastique tendu & d'une grosseur uniforme, est dans*

ses petites vibrations, comme la courbure du fil en ce point.

DEMONSTRATION.

Suppofez que le fil élaftique *AC* prenne dans une de fes vibrations, la figure *APC* infiniment proche de l'axe *AC*. Le fil étant également tendu dans toute fa longueur *AC* par le poids *G*, la tenfion fera à peu près la même, à tous les points de la courbe *APC*.

Soit *p* infiniment proche de *P*. Tirez les tangentes *Pt*, *pt*. Achevez le parallelogramme *pt Pr*. Abaiffez les perpendiculaires *PO*, *pO* fur les tangentes. Suppofons maintenant que les forces égales qui tirent en fens contraires le petit arc *Pp*, foient exprimées par les tangentes *tP*; *tp*. Décompofez ces forces en deux autres *pz*, *PZ* & *tZ*, *pZ*. Les forces égales & directement oppofées *pZ*, *PZ* fe détrui-

ſent. Le petit arc Pp n'eſt donc animé que des deux forces conjointes tZ, c'eſt-à-dire de la force tr dans la direction tr ou PO. La force motrice de cet arc dans la direction tr eſt donc à la tenſion du fil en P comme tr à tP. Mais Pp pouvant paſſer pour un arc de cercle décrit du centre O, on a par la nature du cercle, l'angle $tPr =$ l'angle POp. Donc les triangles iſoceles tPr & POp ſont ſemblables. Donc $Pp . PO :: tr . tP$. Donc la force motrice qui anime Pp dans la direction tr, eſt à la tenſion du fil donnée G, comme Pp à PO. Or G eſt conſtante ; donc cette force motrice ſera comme $\frac{Pp}{PO}$. Mais la force accélératrice eſt toujours en raiſon compoſée de la directe de la force motrice & de l'inverſe de la matiere à mouvoir. La matiere à mouvoir eſt ici comme Pp, à cauſe de la groſſeur unifor-

me du fil. Donc la force accélératrice est comme $\frac{1}{PO}$, ou en raiſon inverſe du rayon oſculateur, ou de la courbure au point *P*. Ce q. f. d.

Après avoir établi ces Lemmes, M. Taylor prétend, que ſi une corde *AC* (*Fig.* 4.) d'une groſſeur uniforme & tenduë par le poids *G* oſcille, de maniere que ſon plus grand écart de la ligne de repos *AC*, ſoit preſqu'inſenſible, & conſéquemment que ſon accroiſſement en longueur, dans ſa plus grande vibration, ne cauſe aucune inégalité dans la tenſion, & qu'on puiſſe négliger ſans erreur l'inclinaiſon des rayons oſculateurs ſur l'axe; il prétend, dis-je, que la nature de la courbe *AQPC* ſera telle, qu'ayant tiré deux ordonnées quelconques *QR*, *PS*, la courbure en *R* ſera à la courbure en *P* comme *QR* à *PS*.

Mais il eſt conſtant que la corde

peut prendre une infinité d'autres figures que celle que cet Auteur lui assigne, & que tous ses points peuvent arriver à la fois à la ligne droite dans une infinité d'autres cas où elle n'a point cette figure. On déduit d'un Mémoire que M. d'Alembert a envoyé à l'Académie de Berlin, sur les cordes vibrantes, qu'en nommant a l'espace qu'un corps pesant parcourt en descendant librement pendant un tems donné θ, m le rapport de la force tendante au poids de la corde, l la longueur de la corde, entendant par ce mot la longueur d'une partie interceptée entre deux chevalets, & supposant que la courbe n'a point de ventres ni de nœuds, on déduit, dis-je, que le tems d'une vibration est $= \frac{2\theta\sqrt{l}}{\sqrt{2am}}$, quelque figure que la corde prenne.

Mais la proposition de M. Taylor deviendra vraye, si on la rend condi-

tionelle, & si on l'énonce de la maniere suivante.

PROPOSITION I.

Si la nature de la courbe APQL, (Fig. 4.) *est telle qu'ayant tiré deux ordonnées quelconques* QR, PS, *la courbure en* Q *soit à la courbure en* P, *comme* QP *à* PS, *je dis que tous les points de cette courbe arriveront en même tems à la ligne droite.*

DEMONSTRATION.

Puisque, par hypothese, la courbure en P est à la courbure en Q comme PS à QR; donc par le Lemme 2, la force accélératrice en P est à la force accélératrice en Q, comme PS à QR; donc les espaces parcourus en tems égaux Pp, Qq, sont entr'eux comme PS à QR, ou *sub-trahendo*, comme pS à qR. Donc pS & qR sont dans la raison donnée de PS à QR;

donc, Lemme premier, les courbures en p & q ; & Lemme 2, les forces accélératrices en ces points, & par conséquent les espaces parcourus pm, qn, sont entr'eux comme pS à qR, ou *sub-trahendo*, comme mS à nR ; donc en continuant le même raisonnement, les forces accélératrices sont toujours comme les espaces qui restent à parcourir ; donc, pag. 31. Cor. 1. liv. 1. princip. math. les points P & Q arriveront en même tems à la ligne de repos. Ce q. f. d.

PROPOSITION II.

Les axes AC *&* BD *étant donnés, décrire la courbe musicale de Taylor.*

Solution.

Tracez (*Fig.* 6.) la dévelopante Eeg du quart de cercle BNE. Tirez les tangentes Bg, Ne. Prenez $Mh = Ne$ & $hF = Bg$. Faites hi égale

& parallele à DC, c'eſt-à dire, à la moitié de la corde. Achevez le triangle Fhi. Je dis que le point P où la ligne Fi coupe la perpendiculaire MP, appartient à la courbe muſicale.

DEMONSTRATION.

Soit (*Fig.* 5.) $BD=a$, $AC=l$, $BM=x$, $PM=y$, l'arc $BP=s$, & le rayon oſculateur en $B=r$. En faiſant Pp conſtante, les formules donnent pour le rayon oſculateur en P ou pour PO, $-\frac{dsdx}{ddy}$.

On a donc par la nature de la courbe $a. a-x :: -\frac{dsdx}{ddy}. r$. Donc $raddy = xdxds - adxds$. Integrant & ajoutant la conſtante Qds, il vient $rady = \frac{1}{2}xxds - axds + Qds$. Mais en ſuppoſant $x=o$, on voit que $dy=ds$. Donc $Q=ra$. Donc l'équation $rady = ra + \frac{xx}{2} - axds$ exprime la nature de la courbe.

Soit $ax - \frac{1}{2}xx = zz$, on aura $rady = \overline{ra - zz}\,ds$; & $rraady^2 = \overline{ra - zz}^2 \times ds^2$. Mais $ds^2 = dx^2 + dy^2$. Ce qui donne $\overline{2razz - z^4}\,dy^2 = \overline{ra - zz}^2\,dx^2$. Mais la courbe *ABC* se confondant presque avec l'axe *AC* par hypothese; la quantité $zz =$ presque o rélativement à ra; car r est très-grande par rapport à a & x. L'équation se transforme donc en $2razzdy^2 = rraadx^2$. D'où l'on tire $dy = \frac{r^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{2ax - xx}} = \frac{r^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} \times \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$.

Soit une ordonnée *mn* infiniment proche de *MN*, & *Nt* parallele à *BD*. Par la nature du cercle *MN*. *ND* :: *Nt*. *Nn*, ou $\sqrt{2ax - xx}$. $a :: dx$. $Nn = \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$. On a donc $dy = Nn \times \sqrt{\frac{r}{a}}$, & intégrant $y = BN \times \sqrt{\frac{r}{a}}$, à quoi il ne faut ni ajou-

ter, ni ôter; car faisant $y = o$, BN devient aussi o.

Mais lorsque $PM = CD$, ou $y = \frac{l}{2}$; alors $BN = BNE$ & par conséquent $\frac{l}{2} = BNE \times \sqrt{\frac{r}{a}}$ ou $\sqrt{\frac{r}{a}} = \frac{\frac{1}{2}l}{BNE}$. Donc en tout point de la courbe, substitution faite, on aura $y = \frac{BN \times \frac{1}{2}l}{BNE}$ ou $y . \frac{1}{2}l :: BN . BNE$.

Mais (*Fig. 6.*) $Fh = BNE$, $MF = BN$, $hi = DC = \frac{1}{2}l$. Donc $MP = y$. Ce qu'il falloit démontrer.

Corollaire.

PS étant à BD comme r à PO, on aura $PO \times PS = ar$. Soit 1 à c comme le diametre à la circonférence, & par conséquent $a . BNE :: 1 . \frac{1}{2}c$, ou $BNE = \frac{1}{2}ac$. Et puisque $\sqrt{\frac{r}{a}} = \frac{\frac{1}{2}l}{BNE}$; $\sqrt{\frac{r}{a}} = \frac{l}{ac}$, & $\frac{r}{a} = \frac{ll}{aacc}$ ou $r = \frac{ll}{acc}$ & $PO \times PS = \frac{ll}{cc}$.

PROPOSITION III.

Soit le rapport du diametre à la circonférence $= \frac{1}{c}$, *la longueur d'une corde d'instrument uniformément épaisse* $= l$, *son poids* $= P$; *le poids qui la tend* $= G$ *&* *la longueur d'un pendule qui se meut dans une cycloïde* $= D$.

Je dis que le tems d'une vibration de la corde sera au tems d'une oscillation du pendule, en raison sous-doublée de Pl *à* $ccDG$, *&* *le nombre des vibrations de la corde dans le tems d'une oscillation du pendule* $= \frac{c\sqrt{DG}}{Pl}$.

DEMONSTRATION.

Premiere partie. Soit la force dont la particule Pp est pressée au lieu P $= A$; son poids $= B$. On a, Lemme 2, $A. G :: Pp. PO$, & à cause de l'uniformité d'épaisseur, $P. B :: l. Pp$, & *conjungendo* $P \times A. B \times G :: l.$

PO, ou $A.B :: G \times l. PO \times P$.

Maintenant si la particule Pp oscilloit dans une cycloïde dont le périmétre entier fut égal à $2PS$, en vertu d'une force motrice ou d'un poids A; le tems d'une de ses oscillations dans la cycloïde feroit égal au tems d'une de ses vibrations sur la corde; car la force accélératrice de la particule dans la cycloïde décroit en raison de la distance au point le plus bas, de même que dans la corde en raison de la distance au point S; & d'ailleurs, la force motrice de la particule dans la cycloïde feroit à son point le plus haut, A ou telle qu'on l'a supposée à la même particule sur la corde. *Voy.* le Corol. de la propos. 51. du liv. 1. de Neuton.

Mais si l'élement Pp, au lieu de se mouvoir dans une cycloïde dont le périmétre feroit égal à $2PS$ & la force motrice feroit A, oscilloit dans une cycloïde dont le périmétre fut $2D$,

en vertu de son poids B ; par une proprieté de la cycloïde, démontrée corol. de la propos. 50. du liv. 1. des princip. math. de Neuton ; la longueur de ce second pendule seroit $= D$. Or par la propos. 24. du même Auteur, liv. 2 ; les quantités de matiere suspenduës étant égales, le tems d'une oscillation d'un pendule, dont la largeur est D, & dont la force motrice en commençant est B, est au tems d'un oscillation d'un pendule, dont la longueur est PS & la force motrice A, en raison composée de la sous-doublée de la longueur D à la longueur PS, & de la sous-doublée de la force A au poids B. Mais le tems d'une vibration de l'élement Pp animé sur la corde, d'une force A, est égal au tems d'une oscillation de cet élement dans une cycloïde dont le périmétre seroit $2PS$ & partant PS, la longueur du pendule mû en vertu de la même force

A, comme nous avons vû.

Donc le tems d'une vibration de la corde ou de la particule *Pp* animée de la force *A*, eſt au tems d'une oſcillation d'un pendule, dont la longueur eſt *D* & dont la force motrice en commençant eſt *B*, en raiſon composée de la ſous-doublée de la longueur *PS* à la longueur *D* & de la ſous-doublée du poids *B* à la force *A*. C'eſt-à-dire, en raiſon ſous-doublée de la quantité $PO \times PS \times P$ à la quantité GlD; & à cauſe de $PO \times PS = \frac{ll}{cc}$ en raiſon ſous-doublée de Pl à $ccDG$.

Il ne me reſte plus à trouver que le nombre des vibrations iſochrones que la corde fait pendant une oſcillation du pendule. C'eſt la ſeconde partie de la démonſtration.

Seconde partie. Soit ce nombre $= n$. Soit *T* le tems d'une vibration de la corde. *t* le tems d'une oſcilla-

tion du pendule. Le tems d'une vibration de la corde pris autant de fois qu'elle fait de vibrations pendant une oscillation du pendule, doit être égal au tems d'une seule oscillation du pendule ; c'est-à-dire, que $nT = t$, ou $n. 1 :: t. T$. Mais $t. T :: \sqrt{ccDG}. \sqrt{Pl}$. Donc $n. 1 :: \sqrt{ccDG}. \sqrt{Pl}$. Donc $n = c\sqrt{\frac{GD}{Pl}}$: Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Si l'on compare deux cordes différentes entr'elles ; C & D étant des quantités constantes, les nombres de vibrations faites dans un tems donné seront comme $\sqrt{\frac{G}{Pl}}$; mais les nombres de vibrations faites dans un tems donné étant d'autant plus grands que le tems d'une seule vibration est petit, on a $\sqrt{\frac{G}{PL}}. \sqrt{\frac{g}{pl}} :: t. T$. ou $T. t. ::$

$\sqrt{\frac{PL}{G}} . \sqrt{\frac{pl}{g}}$, ou les tems des vibrations comme $\sqrt{\frac{PL}{G}}$.

COROLLAIRE II.

Le Pendule dont la longueur D eſt de trois pieds, huit lignes $\frac{1}{2}$, ou de $\frac{881}{24}$ pouces, fait une oſcillation à chaque ſeconde; & 1 eſt à c comme 113 à 355. Subſtituant ces valeurs dans la formule $c\sqrt{\frac{GD}{PL}}$, on trouve le nombre des vibrations d'une corde dans une ſeconde, à peu près comme $\frac{355}{113}\sqrt{\frac{881G}{24PL}} = 19.0341\sqrt{\frac{G}{PL}}$.

REMARQUE I.

On n'entend dans tout ce calcul, par la longueur & le poids de la corde, que la longueur & le poids de la partie interceptée entre deux chevalets & qu'on fait réſonner; c'eſt à l'aide de ces

ces chevalets qu'on empêche la corde entiére de frémir.

REMARQUE II.

Quoique les formules de M. Taylor ne paroiſſent pas d'abord applicables à tous les cas, mais ſeulement à celui où la corde vibrante prend une certaine figure ; elles ſont cependant bonnes pour tous ceux où les points de la corde arrivent en même tems à la ligne de repos.

Car ſoit (*Fig.* 7.) une corde *AB*, fixe par ſes deux extrémités en *A* & en *B* : ſi l'on imprime perpendiculairement à chaque point de cette corde une certaine viteſſe, il eſt évident que cette corde miſe en mouvement fera des vibrations. Si les viteſſes imprimées à chaque point ſont telles que tous les points arrivent en même tems à la ligne droite *AB*, en faiſant leurs vibrations ; alors le tems de ces vibra-

tions ſera le même, quelle que ſoit la viteſſe primitive imprimée à chaque point. Ainſi, ſoit que la corde doive prendre la figure donnée par Taylor, ſoit qu'elle en doive prendre une autre, le tems de ſes vibrations ſera toujours le même, & par conſéquent elle fera entendre le même ſon. Nous nous contentons d'énoncer ces Propoſitions, dont la démonſtration rigoureuſe eſt difficile & nous meneroit trop loin.

Il en ſeroit de même ſi la corde avoit d'abord une figure *A B C* qu'elle eût été obligée de prendre par l'action de quelques puiſſances. Car il eſt évident que relâchant ſubitement cette corde elle fera des vibrations autour des points *A* & *B*; & que ſi tous ſes points doivent arriver en même tems à la ligne droite *AB*, ſa figure ne fait rien à la durée de ſes vibrations ni par conſéquent au ſon qu'elle produit, du

moins rélativement à ſon degré du grave à l'aigu ; quant à ſa véhémence & à ſon uniformité, ce pourroit être autre choſe.

Mais il eſt d'expérience, qu'une corde qui a été frappée par un archet, prend en aſſez peu de tems une figure telle que tous ſes points arrivent en même tems à la ligne de repos. Ainſi les formules de Taylor peuvent être regardées comme générales & comme exprimant aſſez exactement le nombre des vibrations des cordes.

Cependant on trouve que, ſi l'on éloigne une corde de ſon point de repos en la touchant par ſon milieu, & que ſes deux parties conſervent toujours dans leurs vibrations la figure mixtiligne, ces vibrations ſeront de plus longue durée, que ſi on frappoit la corde en un autre point ; ce qui donne lieu de croire que ce n'eſt qu'après un certain nombre de vibrations, que

la corde acquiert une figure telle que tous ſes points arrivent en même tems à la ligne droite, & que ſes premieres vibrations ſont d'autant plus courtes qu'on la frappe plus loin de ſon milieu. C'eſt apparemment pour cette raiſon qu'une corde de violon, que l'on touche à vuide près du chevalet, rend un ſon plus aigu que ſi on la touche par ſon milieu.

Il en eſt de même ſi le coup dont on la frappe n'eſt pas appliqué avec une certaine modération. Le coup d'archet eſt-il violent, & l'écart de la ligne de repos devient-il ſenſible, les vibrations ceſſent d'être iſochrones & ſe font en commençant un peu plus vite que dans la ſuite. Il en eſt encore en cela des vibrations des cordes, comme des oſcillations d'un pendule qui ne ſont iſochrones que lorſqu'elles ſont fort petites.

Il eſt inutile d'inſiſter ſur les varié-

tés que les ſuppoſitions qu'on peut faire, introduiſent dans les formules précédentes. Il eſt évident que le nombre des vibrations d'une corde étant dans un tems donné comme la racine quarrée du poids qui la tend, diviſé par le produit fait du poids de la corde & de ſa longueur, ſi deux cordes ſont de même longueur, les nombres de leurs vibrations dans un tems donné, ſeront comme les racines quarrées des poids qui les tendent diviſés par les poids des cordes, & ainſi des autres hypotheſes.

V.

Les vibrations d'une corde produiſent des ondulations dans l'air. L'air agite le tympan. Le tympan tranſmet ſon frémiſſement aux nerfs auditifs; & les nerfs auditifs ne font peut-être que répéter les vibrations de la corde. Cela ſuppoſé, l'oreille eſt un vrai tam-

bour de Basque. Le tympan represente la peau. Les nerfs auditifs répondent à la corde qui traverse la base ; & l'air fait l'office des baguettes ou des doigts. »

Quoiqu'il en soit, il est certain que la célérité plus ou moins grande des vibrations distingue les sons en graves & en aigus. Un son est d'autant plus grave, que le nombre des vibrations qui frapent l'oreille dans un tems donné est petit. Un son est d'autant plus aigu que le nombre des vibrations est plus grand dans le même tems. Ceci est d'expérience. Attachez successivement différens poids à la même corde, vous en tirerez des sons d'autant plus aigus que les poids seront plus grands. Or il est évident que plus les poids sont grands, plus les vibrations sont promptes.

Nous avons donc une façon d'exprimer les rapports des sons du grave

à l'aigu. Il ne s'agit que de les considérer comme des quantités dont les nombres des vibrations produites dans un tems donné sont les mesures ; car la longueur d'une corde, sa grosseur & le poids qui la tend, étant donnés, on a par les propositions précédentes l'expression en nombre, des vibrations produites dans un tems limité.

Voici donc ce que l'on entend précisément en Musique par une octave, une seconde, une tierce, une quarte, &c. Si vous pincez une corde & qu'elle fasse un certain nombre de vibrations dans un tems donné, 4 vibrations par exemple ; trouvez moyen, soit en la racourcissant, soit en la tendant d'un plus grand poids, de lui faire produire 8 vibrations dans le même tems donné & vous aurez un son qui sera, ce qu'on appelle, à l'octave du premier.

Si vous pincez une corde & qu'elle fasse deux vibrations dans un tems don-

né, trouvez moyen, soit en la racourcissant, soit en la tendant d'un plus grand poids de lui faire produire 3 vibrations dans le même tems, & vous aurez l'intervalle du grave à l'aigu que les Musiciens appellent une quinte.

Or les formules précédentes donneront toujours de combien la corde doit être racourcie, ou tenduë de plus qu'elle ne l'étoit.

Mais il y a des mesures à garder avec nos sens, un tempérament à observer dans les choses qu'on leur presente. Ils ne peuvent embrasser un objet trop étendu. Un trop petit leur échappe. Tous les sons sensibles sont renfermés dans des limites au-delà desquels, ou trop graves ou trop aigus, ils deviennent inaprétiables à l'oreille. Or on peut en quelque façon fixer ces limites. C'est ce que M. Euler a exécuté; & selon ses expériences & son calcul, tous les sons sensibles sont

compris en 30 & 7552, intervalle qui renferme huit octaves. C'eſt-à-dire que, ſelon ce ſçavant Auteur, le ſon le plus grave aprétiable à notre oreille, fait 30 vibrations par ſeconde, & le plus aigu, 7552 vibrations dans le même tems donné.

Un intervalle en général eſt la meſure de la différence de deux ſons, dont l'un eſt grave & l'autre aigu.

Soient trois ſons a, b, c; a eſt le plus grave; c le plus aigu; b eſt moyen entre a & c. Il eſt évident par la définition précédente, que l'intervalle de a à c eſt fait des intervalles de a à b & de b à c.

Si l'intervalle de a à b eſt égal à l'intervalle de b à c; ce qui arrive toutes les fois que $a. b :: b. c.$ Alors l'intervalle de a à c, ſera double de l'intervalle de a à b.

D'où il s'enſuit que les intervalles doivent être exprimés par les valeurs

des rapports que les sons ont entr'eux. Ainsi l'intervalle de a à b, doit être exprimé par $\frac{b}{a}$, celui de b à c, par $\frac{c}{b}$; ou ce qui est encore plus commode, on representera le 1r par log. b—log. a, & le second par log. c—log. b; & faisant $a=2$, & $b=3$, on aura pour l'expression de l'intervalle que les Musiciens appellent une quinte $l3-l2$. D'où l'on voit que, l'expression de l'octave étant $l2-l1$, l'octave & la quinte sont des intervalles incommensurables entr'eux, ensorte qu'il n'y a aucun intervalle, quelque petit qu'il soit, qui les mesure exactement l'un & l'autre; ou aucune aliquote commune entre $l\frac{2}{1}$ & $l\frac{3}{2}$. Car il n'y a aucune puissance x entiére ou fractionaire qui soit telle que $\frac{3^x}{2}=2$. En effet, soit $x=\frac{m}{n}$. Donc $\frac{3^m}{2}=2^n$. Ce qui est impossible.

Il en sera de même de tous les intervalles qui seront exprimés par des logarithmes qui différeront entr'eux comme $l\frac{3}{2}$ & $l\frac{5}{4}$.

Au contraire, on pourra comparer les intervalles qui seront exprimés par des logarithmes de nombres qui seront des puissances d'une même racine. Ainsi l'intervalle $\frac{27}{8}$ est à l'intervalle $\frac{9}{4}$ comme 3 à 2. Car le premier est $3\,l\frac{3}{2}$ & le second est $2\,l\frac{3}{2}$.

On a par la même voye que nous venons de suivre, la facilité d'ôter un intervalle d'un autre & de connoître l'intervalle restant. Si on demande, par exemple, quel est l'intervalle restant, après qu'on a ôté la quinte de l'octave ; j'ôte $l3 - l2$ de $l2$, & j'ai $2l2 - l3$. Mais $2l2 = l4$. Donc $2l2 - l3 = l4 - l3$ ou $l\frac{4}{3}$ ou $\frac{4}{3}$, expression de l'intervalle connu sous le nom de quarte.

Lorsque les intervalles sont incom-

menſurables, on peut à l'aide des logarithmes avoir en nombres leur rapport approché. Ainſi $l2 = 0.3010300$ & $l3 - l2 = 0.1760913$. L'intervalle de l'octave eſt donc à l'intervalle de la quinte comme 3010300 à 1760913.

Remarque.

Pour abaiſſer cette fraction & avoir des rapports, de plus en plus approchés de celui qu'on cherche, il faut diviſer 301300 par 1760913. Il vient pour quotient un entier plus un reſte. Soit cet entier $= q$ & le reſte $= \frac{m}{n}$.

Transformez $\frac{m}{n}$ en $\frac{1}{\frac{n}{m}}$; & le quotient trouvé ſera $q + \frac{1}{\frac{n}{m}}$. Soit le quotient de $\frac{n}{m} = r + \frac{s}{t}$, le quotient trouvé ſera donc transformé derechef en $q + \frac{1}{r + \frac{s}{t}}$. Changez la fraction $\frac{s}{t}$ en

$\frac{1}{\frac{t}{s}}$ & vous transformerez encore le premier quotient en $q+\frac{1}{r+\frac{1}{\frac{t}{s}}}$, & ainsi de suite.

Il est évident qu'à chaque transformation, on aura un nouveau rapport, plus approché du vrai que le rapport qui l'aura précédé.

Voici maintenant la maniére de diviser un intervalle quelconque en parties égales. Prenez le logarithme de cet intervalle ; divisez-le en tant de parties que l'on voudra. Cherchez ensuite dans la table, le nombre qui correspondra à l'une de ces parties. Il est évident que ce nombre aura à l'unité le rapport cherché. Ainsi soit demandé un intervalle trois fois moindre que l'octave. Je cherche le logarithme de 2. J'en prens la troisiéme partie. Je regarde dans la table le nombre corres-

pondant à cette troisiéme partie, & il exprime par son raport à l'unité, l'intervalle demandé.

REMARQUE.

Mais on pourroit chercher pourquoi j'exprime indifféremment un intervalle par $\frac{b}{a}$ ou par log. b — log. a, ces quantités n'étant pas les mêmes.

En voici la raison. $\frac{b}{a}$ exprime proprêment le rapport des nombres de vibrations qui constituent les sons; mais log. b — log. a, peut être regardé comme exprimant les intervalles, puisque si l'on fait glisser un chevalet sous une corde, tandis qu'à l'aide d'un archet on en tirera un son non interrompu, on entendra ce son croissant, pour ainsi dire, uniformément, depuis le dégré le plus grave ou le son de la corde entiére jusqu'à son octave & par delà.

Du reſte il n'y auroit pas d'inconvenient à ne prendre ces expreſſions logarithmiques que comme une hypotheſe. Il n'y a pas même d'apparence que M. Euler qui nous les propoſe, prétende les faire valoir davantage. Car on ne peut guére calculer ou comparer les ſons en tant que ſenſations. Les longueurs des cordes & les nombres des vibrations qui les conſtituent, ſont les ſeules choſes comparables. Mais pour repreſenter les intervalles par des logarithmes, il faudroit, par exemple, qu'en entonnant une tiérce majeure, l'excès de la ſenſation du dernier ſon ſur la ſenſation du ſecond, fût double de l'excès de la ſenſation de celui-ci ſur le premier. Mais qu'eſt-ce que cela ſignifie ? & quand cela auroit un ſens bien précis, qui ſçait s'il eſt vrai ?

V I.

La diſtinction des ſons en graves &

en aigus n'eſt pas la ſeule qu'on puiſſe faire. On les conſidere encore comme forts & foibles. La force du ſon varie ſelon la diſtance au corps ſonore. Il en eſt du ſon comme de la lumiere, & en general de tout ce qui émane d'un point conſidéré comme centre. Plus la diſtance à laquelle le ſon eſt parvenu eſt grande, plus il s'eſt affoibli ; & cet affoibliſſement ſuit ordinairement la raiſon des quarrés des diſtances ; c'eſt-à-dire, qu'à une diſtance double il eſt quatre fois plus foible ; neuf fois à une diſtance triple, ſeize fois à une diſtance quadruple, & ainſi de ſuite ; en ſuppoſant toutefois que ſa propagation eſt libre : car ſi le ſon eſt dirigé de quelque côté par des cauſes particuliéres, à l'Orient, par exemple, lorſqu'il tend naturellement à ſe propager vers le Midi ; la regle n'a plus lieu.

Si le ſon ſe répand & s'affoiblit comme

comme la lumiere, il se réfléchit aussi comme elle, & il peut arriver qu'à la rencontre d'une surface dure & polie, plusieurs fibres sonores se réunissent dans un même lieu. Lorsque l'on se trouvera dans quelques unes de ces chambres artificielles aux angles desquelles des personnes parlent bas & s'entendent, malgré l'intervalle qui les sépare; on n'aura qu'à lever les yeux au plafond & l'on appercevra dans sa figure elliptique, la raison de ce phénomene.

Il est démontré que, si des foyers d'une ellipse, on tire deux lignes qui se coupent en un point quelconque de cette courbe, ces lignes feront sur la tangente en ce point, deux angles égaux. C'est-à-dire, qu'en considérant l'un comme angle d'incidence, l'autre sera l'angle de réflexion. Or les plafonds de ces chambres sont des ellipses dont les interlocuteurs occu-

né, que celui qu'il avoit en commençant, il faut que les vibrations qui fixent son degré, soient isochrones; & pour cet effet, la corde doit être suffisemment tenduë, & le coup dont elle est frapée, modéré. Sans ces deux conditions, elle s'écartera sensiblement de la ligne de repos; ses premieres vibrations seront plus promptes que les suivantes; aussi-tôt le son ne sera plus uniforme, & l'oreille se révoltera.

Le chagrin de l'organe naît de ce que le défaut d'isochronisme dans les vibrations, rendant le rapport d'un son variable, il ne sçait en quelle raison ce son qui le frappe est à celui qui le précéde, l'accompagne ou le suit. Ce qui démontre que le plaisir musical consiste dans la perception des rapports des sons.

REMARQUE.

Mais cette origine n'eſt pas particuliére au plaiſir muſical. Le plaiſir en général conſiſte dans la perception des rapports : ce principe a lieu en Poëſie, en Peinture, en Architecture, en Morale, dans tous les arts & dans toutes les ſciences. Une belle machine, un beau tableau, un beau portique ne nous plaiſent que par les rapports que nous y remarquons : ne peut-on pas même dire, qu'il en eſt en cela d'une belle vie comme d'un beau concert. La perception des rapports eſt l'unique fondement de notre admiration & de nos plaiſirs ; & c'eſt de là qu'il faut partir pour expliquer les phénomenes les plus délicats qui nous ſont offerts par les ſciences & les arts. Les choſes qui nous paroiſſent les plus arbitraires, ont été ſuggérées par les rapports : & ce prin-

cipe doit fervir de bafe à un effai philofophique fur le goût, s'il fe trouve jamais quelqu'un affez inftruit pour en faire une application générale à tout ce qu'il embraffe.

Mais fi vous admettez une fois que le plaifir confifte dans la perception des rapports; vous ferez contraint de faire un pas de plus, & de convenir que le plaifir doit varier avec les rapports, & que les rapports les plus fimples fe faififfant avec plus de facilité que les autres, doivent auffi plaire plus généralement. Or de tous les rapports, le plus fimple, c'eft celui d'égalité; il étoit donc naturel que l'efprit humain cherchât à l'introduire partout où il pouvoit avoir lieu. Auffi cela eft-il arrivé. C'eft par cette raifon qu'on fait les aîles d'un bâtiment égales, & les côtés d'une fenêtre paralleles. Si la raifon d'utilité demande qu'on s'en écarte, on lui obéit; mais c'eft com-

me à regret, & l'artiste ne manque jamais de revenir au rapport d'égalité dont il s'étoit écarté. Ce retour que l'on attribue vulgairement à l'instinct, au caprice, à la fantaisie, n'est autre chose qu'un hommage rendu aux attraits naturels de l'harmonie & des rapports; & c'est à lui que nous sommes redevables d'une infinité de petits ornemens minutieux que l'on traite tous les jours d'arbitraires & qui ne sont rien moins. La seule architecture m'en fourniroit mille exemples; mais ils seroient ici déplacés.

Je me contenterai d'appliquer mes idées à une observation que ceux qui ont quelque habitude d'entendre ou de lire de la Musique, auront faite; c'est qu'ordinairement les sons aigus tiennent moins que les graves. Les dessus se précipitent, tandis que les basses vont lentement, à moins que le sujet n'exige qu'elles doublent le

pas. Croit-on que ce ſoit ſans raiſon que les Muſiciens ayent pratiqué de cette maniere, & que leur caprice eſt la ſeule regle qu'ils ayent ſuivie. Si on le croit, on ſe trompe.

Ils étoient ſecretement guidés par la perception des rapports : s'ils ont permis aux ſons aigus de courir, & s'ils ont arrêté les ſons graves ; c'eſt que les rapports que ceux-ci ont en-tr'eux ſont plus difficiles à ſaiſir que les rapports de ceux là, tout étant égal d'ailleurs ; puiſque la corde qui rend des ſons aigus fait beaucoup plus de vibrations dans un tems donné, que celle qui rend des ſons graves. Voilà pour l'emploi des rapports ſimples, & maintenant voici pour le retour des rapports compoſés aux rapports ſimples.

Si l'eſprit, qui eſt naturellement pareſſeux, s'accommode volontiers des rapports ſimples ; comme il n'aime

pas moins la variété qu'il craint la fatigue, on est quelquefois forcé d'user de rapports composés, tantôt pour faire valoir les rapports simples, tantôt pour éviter la monotonie, tantôt pour ajouter à l'expression, & c'est delà que naît en Musique l'emploi que nous faisons de la dissonance ; emploi plus ou moins fréquent, mais presque toujours nécessaire: mais la dissonance, selon les Musiciens, veut ordinairement être préparée & sauvée ; ce qui bien entendu, ne signifie rien autre chose, que si l'on a de bonnes raisons d'abandonner les raports simples pour en presenter à l'oreille de composés, il faut revenir sur le champ à l'emploi des premiers.

OBJECTION.

Mais comment se peut-il faire, dira-t-on, que le plaisir des accords consiste dans la perception des rapports

des sons? La connoissance de ces rapports accompagne-t-elle donc toujours la sensation? c'est ce qu'il paroît difficile d'admettre; car combien de gens, dont l'oreille est très-délicate, ignorent quel est le rapport des vibrations qui forment la quinte ou l'octave, à celles qui donnent le son fondamental. L'ame a-t-elle ces connoissances sans s'en appercevoir; à peu près comme elle estime la grandeur & la distance des objets, sans la moindre notion de Géométrie; quoi qu'une espece de Trigonométrie naturelle & secrete paroisse entrer pour beaucoup dans le jugement qu'elle en porte?

REPONSE.

Nous ne déciderons rien la dessus; nous nous contenterons d'observer qu'il est d'expérience que les accords les plus parfaits sont formés par les sons qui ont entr'eux les rapports les

plus ſimples ; que ces rapports peuvent affecter notre ame de deux manieres, par ſentiment ou par perception, & qu'ils n'affectent peut-être la plûpart des hommes que de la premiere maniere.

L'expérience apprend à modérer un archet ſelon la véhémence qu'on veut donner aux ſons. Quant à la tenſion des cordes, on peut obſerver la regle ſuivante.

Il faut tendre les cordes autant qu'il eſt poſſible ſans les rompre. Les réſiſtances que des cordes minces d'une même matiere font à une puiſſance qui les tire dans le ſens de leur longueur, ſont comme leurs épaiſſeurs, & les épaiſſeurs comme les poids diviſés par les longueurs. On prendra donc les poids tendans en raiſon compoſée de la directe des poids des cordes & de l'inverſe de leurs longueurs.

Si le poids de la corde $= q$, ſa lon-

gueur $= a$, & le poids tendant $= p$: il faut que p ſoit comme $\frac{q}{a}$, & par conſéquent la fraction $\frac{ap}{q}$ eſt conſtante. Car $P.p :: \frac{Q}{A} . \frac{q}{a}$. Donc $\frac{pQ}{A} = \frac{Pq}{a}$ & $\frac{AP}{Q} = \frac{ap}{q}$.

En prenant cette précaution, on pourra ſe promettre des ſons également graves ou aigus pendant toute leur durée. Voyons maintenant ce qu'il y auroit à faire pour les avoir également forts.

VII.

Pour donner à des ſons la même véhémence ; outre la longueur & le poids de la corde, il faudroit conſidérer encore & la force qui la met en mouvement & le lieu où cette force eſt appliquée. Mais la plûpart des inſtrumens à cordes ſont fabriqués de

maniere que la force pulſante eſt la même, & pour ſimplifier le calcul, nous ſuppoſerons qu'elle agit ſur les cordes en des lieux ſemblables; c'eſt-à-dire, ou aux milieux, ou aux tiers, ou aux quarts, &c.

Cela poſé, la véhémence du ſon ne dépendra plus que de la viteſſe avec laquelle les particules de l'air viendront frapper l'oreille à chaque vibration de la corde. Or cette viteſſe des molécules de l'air qui conſtitue la force du ſon, eſt proportionelle à la plus grande viteſſe de la corde, & la plus grande viteſſe de la corde eſt ſelon M. Euler, en raiſon ſous-doublée de la directe du poids qui la tend & de l'inverſe de ſa longueur; c'eſt-à-dire, en conſervant les mêmes expreſſions que ci-devant, comme $\sqrt{\frac{G}{L}}$. On lit page 11 de ſes *tentamina Muſicæ, vehementia ſoni pendet à celeritate*

quâ aeris particulæ quâvis chordæ vibratione in aurem impingunt; hæcque ex celeritate chordæ maximâ est æstimanda. Est vero hæc celeritas proportionalis radici quadratæ ex pondere chordam tendente diviso per longitudinem ejus. D'où il conclut que pour que la force de deux sons soit la même, il faut que $\sqrt{\frac{G}{L}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$, & par conséquent que les poids tendans soient comme les longueurs des cordes. *Consequenter quò soni fiant æquabiles, necesse est ut pondus tendens semper sit ut chordæ longitudo.*

Mais j'avouerai que, de quelque façon que je me sois retourné, je n'ai jamais pû trouver la plus grande vitesse de la corde, comme la racine quarrée du poids qui la tend, divisé par sa longueur, sans supposer la masse de la corde constante. Or cette supposition n'a point été faite, & je doute qu'elle puisse avoir lieu; car dans les

inftrumens à cordes de léton, où l'épaiffeur des cordes étant la même, elles ne différent que par leur longueur & leur tenfion, & dans ceux où les cordes ont différentes longueur, épaiffeur & tenfion, la maffe n'eft affurément pas la même dans chaque corde.

Si M. Euler entend par la plus grande viteffe de la corde, celle qu'elle a en achevant fa premiere demi-vibration, je vais démontrer que $\frac{ca\sqrt{G}}{\sqrt{ML}}$ eft fon expreffion.

PROBLEME.

Trouver la plus grande viteffe de la corde, ou celle qu'elle a en achevant fa premiere demi-vibration.

SOLUTION.

Soient comme dans la Fig. 5. $BD = a$, $AC = L$, $BM = x$, $PM = y$,

l'arc $BP = s$; la maſſe de la corde $= M$. Le rayon oſculateur en $B = r$. Le rayon oſculateur en $P = -\frac{ds dx}{ddy}$ & le rapport de la circonférence au diamétre $= \frac{1}{c}$.

La maſſe de l'élément pP ſera $\frac{M.Pp}{L}$. Car à cauſe de l'uniformité de la corde L. $M :: Pp$. à la maſſe de l'élément Pp. Donc cette maſſe $= \frac{M.Pp}{L}$.

La force motrice en B eſt par le Lemme 2, $\frac{G.Pp}{r}$. Or la force accélératrice étant en raiſon compoſée de la directe de la force motrice & de l'inverſe de la matiere à mouvoir, & la matiere à mouvoir étant ici $\frac{M.Pp}{L}$, on aura pour la force accélératrice en B, $\frac{GL}{Mr}$.

Mais Corol. 1. Propoſ. 1. $r = \frac{LL}{a.c^2}$.

Donc la force accélératrice en B sera $\frac{G.a.c^2}{ML}$.

Soit $DM = z$.

La force accélératrice en M sera $\frac{G.a.c^2}{ML} \times \frac{DM}{BD} = \frac{G.c^2.z}{ML}$. Donc par le principe $pdt = du$, nommant u la vitesse en M, on aura l'équation suivante $-\frac{G.c^2.zdz}{ML} = udu$, car $dt = -\frac{dz}{u}$. Donc intégrant & complétant $\frac{u^2}{2} = \frac{G.c^2}{ML} \times \frac{\overline{aa - zz}}{2}$. Donc lorsque $z = o$; on a $uu = \frac{G.c^2.a^2}{ML}$ & $u = \frac{ac\sqrt{G}}{\sqrt{ML}}$. Ce que j'avois à démontrer.

REMARQUE.

Mais pour vérifier cette expression de la vitesse, supposons-là telle que nous venons de la trouver, & cherchons par son moyen le rapport des tems d'une vibration de la corde L & d'une

d'une oscillation d'un pendule dont la longueur soit D.

Nous avons trouvé $u = \frac{c\sqrt{G}}{\sqrt{ML}} \times aa - zz$, mais $dt = -\frac{dz}{u}$. Donc $dt = -\frac{dz\sqrt{ML}}{c.\sqrt{G}.\sqrt{aa - zz}} = \frac{\sqrt{ML}}{c.\sqrt{G}} \times - \frac{dz}{\sqrt{aa-zz}} = \frac{\sqrt{ML}}{c\sqrt{G}}$ multiplié par l'élément du quart de cercle BNE dont $\frac{-dz}{\sqrt{aa - zz}}$ est l'expression. Donc le tems d'une demi-vibration $= \frac{\sqrt{ML}}{c.\sqrt{G}} \times \frac{BNE}{BD} = \frac{\sqrt{ML}}{c\sqrt{G}} \times \frac{c}{2} = \frac{\sqrt{ML}}{2\sqrt{G}}$.

Soit maintenant (*Fig.* 8.) le pendule CA dont la longueur $CA = D$. La pesanteur $= p$. L'arc $AB = e$. $AN = x$. L'effort en B est $\frac{p \times AB}{CA}$. L'effort en N est $\frac{p \times AN}{CA} = \frac{px}{D}$. Donc par le principe $pdt = du$, on a $-\frac{pxdx}{D} = udu$. Donc intégrant & complétant $u =$

$\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{D}} \times \sqrt{ee - xx}$. Donc $dt = -\frac{dx}{u}$ $= \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{p}} \times -\frac{dx}{\sqrt{ee - xx}}$. Donc le tems d'une demi-oscillation $= \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{p}} \times \frac{c}{2}$. Donc le tems d'une demi-vibration est au tems d'une demi-oscillation comme $\frac{\sqrt{ML}}{2\sqrt{G}}$ à $\frac{\sqrt{D}}{\sqrt{p}} \times \frac{c}{2}$ ou comme $\sqrt{pML}$ à $\sqrt{ccDG}$.

Mais la masse multipliée par la pésanteur d'une particule est égale au poids ou $pM = P$. Donc $\sqrt{pML} = \sqrt{PL}$. Donc le tems d'une vibration est au tems d'une oscillation comme $\sqrt{PL}$ à $\sqrt{ccDG}$. Or c'est précisément ce que nous avons démontré ailleurs, & ce que M. Euler suppose dans toutes ses propositions sur les cordes.

Cependant comme il est beaucoup plus vraisemblable que je n'entens point cet endroit de M. Euler, qu'il

ne l'eſt qu'il ſe ſoit trompé ; je ſuppoſerai qu'afin que la véhémence de deux ſons ſoit la même, il faut que les poids tendans ſoient proportionels aux longueurs des cordes ; d'où nous déduirons avec lui une regle qui peut être d'uſage dans la conſtruction des inſtrumens.

Conſervant toujours les mêmes expreſſions ; $\frac{G}{L}$, $\frac{GL}{P}$, $\frac{LL}{P}$ quotient de $\frac{GL}{P}$ diviſé par $\frac{G}{L}$ & le rapport de $\frac{P}{L}$ à L ſont tous conſtans : $\frac{G}{L}$, parce que les poids tendans doivent toujours être comme les longueurs, pour que la véhémence des ſons ſoit la même ; $\frac{GL}{P}$, parce que les poids tendans doivent toujours être en raiſon compoſée de la directe des poids des cordes & de l'inverſe de leurs longueurs, pour que les ſons ſoient uniformes. Et ces deux raiſons conſtantes diviſées

l'une par l'autre donnent le rapport conſtant de LL à P, ou celui de $\frac{P}{L}$ à L. Mais $\frac{P}{L}$ eſt l'épaiſſeur de la corde ; l'épaiſſeur de la corde doit donc être comme ſa longueur, & la longueur comme le poids tendant.

D'ailleurs le ſon eſt, ainſi que nous l'avons démontré, comme $\sqrt{\frac{G}{PL}}$ & mettant à la place de G & de P leurs proportionelles L & LL, on trouve le ſon reciproquement comme la longueur de la corde.

Ainſi, ſelon le ſçavant Auteur que nous avons cité, pour conſerver à un ſon l'uniformité, & l'égalité de force entre pluſieurs ſons, il faut que le poids tendant, la longueur de la corde & ſon propre poids ſoient tous réciproquement comme le ſon ou comme le nombre des vibrations à produire dans un tems donné, la force

pulſante étant la même.

REMARQUE.

Mais tout cela n'eſt vrai que dans la ſuppoſition, que l'expreſſion de la plus grande viteſſe n'eſt pas telle que nous l'avons trouvée. Car ſi $u = \frac{ac\sqrt{G}}{\sqrt{ML}}$, on aura pour que les véhémences ſoient égales $\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{ML}} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{ml}}$ & par conſéquent $\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{ML}}$ conſtante. D'ailleurs lorſque les cordes ſont de même matiere, les maſſes ſont comme les poids: donc ſubſtituant P à M, on aura $\sqrt{\frac{G}{PL}}$ conſtante. Or $\sqrt{\frac{G}{PL}}$ eſt l'expreſſion du ſon. Donc la force pulſante étant la même, il faut que les ſons ſoient les mêmes pour être également forts, ou des ſons différens ne peuvent être également forts, la force pulſante étant

la même ; resultat bien différent de celui que donne l'expression que M. Euler assigne à u ; & cependant assez conforme à l'expérience.

On pourroit se proposer ici un Problême dont je vais donner la solution, c'est de trouver le plus grand écart de la corde, la force pulsante étant donnée.

PROBLEME.

La force pulsante étant donnée, trouver le plus grand écart de la corde.

SOLUTION.

Soit (*Fig.* 5.) F la force pulsante. Les points S de la corde partiront avec des vitesses qui seront comme SP, car je suppose que la corde prend tout en partant, la forme de la courbe musicale ; & chaque particule de cette corde étant supposée animée de sa vitesse initiale, la somme des forces qui

en resultera, sera égale à F.

Soit u la vitesse en D, $\frac{uz}{a}$ sera la vitesse en S, $Pp = dy$, & par conséquent la masse $Pp = \frac{Pdy}{L}$, & la quantité de mouvement en $S = \frac{uz}{a} \times \frac{Pdy}{L}$. Substituant à dy & à z leurs valeurs tirées de l'équation de la courbe, l'expression précédente se transformera en $\frac{u.P.r^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{1}{2}}}{L} \times \frac{\overline{a-x}\,dx}{\sqrt{2ax-xx}}$, dont l'intégrale est $\frac{u.P.r^{\frac{1}{2}}.a^{-\frac{1}{2}}}{L} \times \sqrt{2ax-xx}$ qu'il faut doubler & compléter; je dis doubler, parce que l'intégrale prise sans être doublée ne donneroit que la quantité de mouvement de la partie CD.

On a donc $\frac{2uPr^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}\times a}{L} = \frac{2uPr^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}}{L}$ qu'il faut faut faire égal à F. Mais $r = \frac{ll}{a.c^2}$, donc $r^{\frac{1}{2}} = \frac{L}{a^{\frac{1}{2}}c}$. Donc $F = \frac{2uP}{c}$.

Mais $u = \frac{ac\sqrt{G}}{\sqrt{ML}}$. Donc $\frac{F.c}{2P} = \frac{ac\sqrt{G}}{\sqrt{ML}}$. Or les cordes étant ſuppoſées de même matiere, $M=P$. Donc $a = \frac{F\sqrt{L}}{2\sqrt{PG}}$. Ce qu'il falloit trouver.

Cette derniere expreſſion peut encore ſe ſimplifier ; car nous avons dit que pour avoir des ſons uniformes, il falloit que G fût comme $\frac{P}{L}$; ſubſtituant donc cette valeur, il vient $a = \frac{FL}{2P}$.

Nous allons paſſer à quelques autres ſons de la premiere eſpece, & abandonner les cordes pour n'y revenir que lorſque l'analogie des corps ſonores dont nous avons encore à parler, nous y raménera.

VIII.

On peut rapporter à la premiere eſpece de ſon, les cloches, les ver-

ges de métaux & même les bâtons durcis au feu ; mais on ſçait peu de choſe ſur ces corps. Il eſt preſque impoſſible de déterminer le ſon d'une cloche par ſa forme & ſon poids. Il faudroit entrer dans des conſidérations vagues ſur l'élaſticité & la cohéſion des parties de la matiere dont on les fond. Ce que l'on peut avancer, c'eſt que les ſons de deux cloches de même matiere & de figures ſemblables, feront entr'eux réciproquement comme les racines cubiques des poids ; c'eſt-à-dire, que ſi l'une peſe huit fois moins que l'autre, elle fera dans le même tems un nombre double de vibrations ; un nombre triple, ſi elle peſe vingt-ſept fois moins ; & ainſi de ſuite. Car en leur appliquant ce que nous avons dit des cordes, & faiſant le poids tendant G comme $\frac{P}{L}$, la formule $\sqrt{\frac{G}{PL}}$ ſe réduit à $\frac{1}{L}$; mais lorſque

des corps homogenes ſont ſemblables, leurs poids ſont entr'eux comme les cubes de leurs côtés homologues, & par conſéquent leurs côtés homologues, comme les racines cubiques de leurs poids; donc les nombres de vibrations produites dans un tems donné étant comme $\frac{1}{L}$, elles ſeront auſſi comme $\frac{1}{\sqrt[3]{P}}$.

Quant aux verges ſonores, ſi, pour eſtimer le rapport de leurs ſons, il ne faut avoir égard qu'à leurs longueurs, comme M. Euler le prétend; s'il faut conſidérer les fibres qui les compoſent comme autant de cordes qui font leurs vibrations ſéparément; s'il faut négliger la force tendante; la formule $\sqrt{\frac{G}{PL}}$ devient alors $\sqrt{\frac{1}{PL}}$. Mais ſi les verges ſont ſemblables & de même matiere, P ſera comme L^3. Donc $\sqrt{\frac{1}{PL}}$ ſe réduit à $\frac{1}{L^2}$, c'eſt-à-dire, que

les nombres de vibrations produites dans un tems donné, feront réciproquement comme les quarrés des longueurs.

REMARQUE.

Mais, dira-t-on, pourquoi négliger dans le cas des verges la force tendante que l'on fait entrer en calcul, lorfqu'il eft queftion des cloches ?

C'eft que la roideur des verges eft fi grande, relativement à la force pulfante qui les fait réfonner, qu'on peut fans erreur fenfible traiter comme conftante, la force qui les tend. Mais il n'en eft pas ainfi des cloches. La figure d'une cloche s'altere fenfiblement, quand elle eft en volée. De ronde qu'elle étoit, en repos; le coup du batant la rend ovale, & l'œil apperçoit cet effet qui fera d'autant moins fenfible que le poids de la cloche fera grand, eu égard à fon diamétre; c'eft-à-dire, que la force tendante

peut être ſuppoſée comme $\frac{P}{L}$.

La dilatation & la percuſſion ſubite de l'air, qui ſont les deux cauſes des ſons de la ſeconde eſpece, agiſſent à peu près de la même maniere.

L'extrême viteſſe de l'air, dans la dilatation ; ou celle d'un corps mu, dans la percuſſion, donne lieu à une compreſſion ; l'air comprimé tend à ſe reſtituer dans ſon état naturel : mais d'un mouvement accéléré en vertu duquel il exerce des vibrations ſemblables à celles d'une corde. Or c'eſt par ces vibrations qu'il faut expliquer le bruit, ou plutôt le ſon des vents, du tonnerre, de la poudre à canon & de tout corps lancé dans l'air avec viteſſe. Mais comme il eſt impoſſible d'appliquer à ces phénomenes le calcul, je paſſe aux ſons de la troiſiéme eſpece, après avoir obſervé qu'il y a entre le bruit & le ſon une grande différence.

Le bruit est un ; le son au contraire est composé ; un son ne frappe jamais seul nos oreilles ; on entend avec lui d'autres sons concomitans, qu'on appelle ses harmoniques. C'est de là que M. Rameau est parti dans sa génération harmonique ; voilà l'expérience qui sert de base à son admirable systême de composition, qu'il seroit à souhaiter que quelqu'un tirât des obscurités qui l'envelopent, & mit à la portée de tout le monde ; moins pour la gloire de son Inventeur, que pour les progrès de la science des sons.

I X.

Plus la cause d'un phénomene est cachée, moins on fait d'efforts pour la découvrir. Mais cette paresse, ou ce découragement des esprits, n'est ni le seul, ni peut-être le plus grand obstacle à la perfection des arts & des sciences. Il y a une sorte de vanité qui aime

mieux s'attacher à des mots, à des qualités occultes, ou à quelque hypothese frivole, que d'avouer de l'ignorance; & cette vanité leur est plus funeste encore. Bien ou mal, on veut tout expliquer, & c'est, grace à cette manie, que l'horreur du vuide a fait monter l'eau dans les pompes, que les tourbillons ont été la cause des mouvemens céléstes, que l'attraction sera longtems encore celle de la pesanteur des corps, & pour en revenir à mon sujet, qu'on avoit attribué jusqu'à présent au fremissement de la surface intérieure du tuyau, le son & les autres propriétés des Flutes. Ces instrumens avoient beau rendre le même son, quoique l'épaisseur, la matiere & l'ouverture en fussent différentes; on s'en tenoit opiniâtrément à un systême que la diversité seule de la matiere étoit capable de renverser.

Enfin M. Euler, après avoir soi-

gneusement examiné la structure des Flutes, trouva une maniere d'en expliquer les effets, aussi solide qu'ingénieuse. Ce morceau de Physique est peu connu, quoique ce soit un des plus beaux que nous ayons ; ce sont ces deux motifs réunis au besoin que j'en ai pour les conséquences que j'en tirerai, qui me déterminent à l'inserer ici.

La Flute est composée ainsi que les tuyaux appellés dans un buffet d'Orgue, tuyaux à bouche ou de mutation; du pied *AABB* qui est en bec ou en cône ; c'est ce bec qui introduit le vent qui fait résonner le tuyau. A ce pied est joint le corps *BBDD* du tuyau. Il y a entre le pied & le corps un diaphragme *EEF* percé d'une ouverture par où le vent s'échappe. On appelle cette ouverture, lumiere. Enfin au-dessous de cette ouverture est la bouche *BBCC* du tuyau. C'est

une eſpece de fenêtre dont la levre d'en bas *CC*, qui eſt en biſeau, coupe le vent au ſortir de la lumiere, & n'en admet dans le tuyau qu'une couche légére. Telle eſt auſſi la figure des anches & celles que prennent les levres au défaut d'anches; ce qui fait rentrer les flutes traverſieres & autres, dans la claſſe des Flutes à bec ou tuyaux de mutation.

Il faut obſerver de plus que dans tous les inſtrumens à vent, les parois intérieurs ſont durs & polis & que l'air n'y rencontre aucun obſtacle.

Il ſuit de cette conſtruction que l'air au ſortir de la lumiere raſe la ſurface intérieure du tuyau & comprime celui dont il étoit rempli. Cet air comprimé ſe dilate à ſon tour & le ſon eſt produit par ces vibrations réciproques qui naiſſent de l'inſpiration & qui durent autant qu'elle.

Cela ſuppoſé, dit M. Euler, cher
chon

chons le ſon d'une Flute dont la longueur & la capacité ſoient données, & renonçons à cette explication, ſi la ſolution de ce problême ne s'accorde pas avec les expériences.

Le corps ſonore dont les vibrations tranſmiſes à l'air viennent frapper notre oreille, c'eſt l'air même contenu dans le tuyau, dont la quantité ſe déterminera par la longueur & la capacité de la Flute.

La peſanteur de l'atmoſphere qui contraint l'air, dont la Flute eſt remplie, d'exercer des vibrations, fait ici la fonction de poids tendant, & ce poids ſera connu par la hauteur à laquelle le vif-argent eſt ſuſpendu dans le tube de Torricelli.

Voilà donc le cas des Flutes réduit à celui des cordes & ſoumis à la formule $\sqrt{\frac{G}{PL}}$.

Soit a la longueur d'une Flute; bb

F

ſon ouverture ; le rapport de la peſanteur de l'air à celle du vif-argent $\frac{m}{n}$; la hauteur du mercure dans le barométre k, c'eſt-à-dire que nous avons une corde dont la longueur eſt a, le poids $mabb$, & la tenſion égale à la preſſion de l'atmoſphere. Mais les preſſions des fluides ſont, comme on le démontre en hydrodynamique, comme les baſes multipliées par les hauteurs. La baſe eſt ici bb ; & la hauteur k ; donc le poids tendant eſt comme $nkbb$: & par conſéquent le nombre des oſcillations faites dans une ſeconde comme $\frac{355}{113}\sqrt{\frac{881\,nkbb}{24a \times mabb}} = \frac{355}{113a}\sqrt{\frac{881\,nk}{24m}}$ = au ſon qu'il falloit déterminer.

Or la raiſon de m à n étant toujours à peu près la même, & les différentes températures de l'air n'influant pas conſidérablement ſur la hauteur k, les

ſons des Flutes cylindriques ou priſmatiques ſeront entr'eux reciproquement comme les longueurs. Car effaçant toutes les conſtantes, l'équation precédente ſe réduit à $\frac{1}{a}$.

Mais entrons dans le détail des phénomenes, c'eſt lui qui ruine ou ſoutient une hypotheſe. Cherchons donc en demeurant dans celle de M. Euler, comment le ſon d'une Flute, dont la longueur eſt donnée, eſt au ſon d'une corde dont la longueur, le poids & la tenſion ſont connus. Si l'expérience & le calcul conſervent entre la corde & la Flute l'uniſſon que nous y ſuppoſerons, il en réſultera pour la théorie que nous venons d'expoſer, un grand dégré de certitude.

Soit la plus grande valeur de $\frac{n}{m}$ dans les tems chauds 12000. Sa plus petite valeur dans les tems froids 1000. La plus grande hauteur k du mercure,

dans le Barométre 2460. Sa plus petite hauteur 2260. Donc le Barométre & Thermométre étant l'un & l'autre à leurs plus grandes hauteurs, le son d'une Flute quelconque *a*, sera comme $\frac{960771}{a}$; & lorsqu'ils seront à leurs plus petites hauteurs, comme $\frac{840744}{a}$; & prenant un milieu entre ces deux expressions, on aura $\frac{900000}{a}$ pour le nombre des vibrations, & par conséquent pour le son d'une Flute *a*, dans les tems ordinaires, lorsqu'il ne fait ni bien froid ni bien chaud. Donc une flute qui fait 100 vibrations par seconde a 9000 scrupules ou 9 pieds du Rhin de longueur. Donc une Flute qui feroit 118 vibrations par seconde & qui résoneroit le *c* ou le C sol ut, auroit 7627 scrupules ou $7\frac{1}{2}$ pieds du Rhin de longueur. Ce qui s'accorde avec l'expérience; car c'est en effet

cette longueur que l'on donne aux tuyaux que l'on prend pour le C sol ut.

Mais, dira-t-on, ce n'est pas $7\frac{1}{2}$ pieds qu'on leur donne; mais 8 pieds communément.

J'en conviens; mais il faut négliger cette différence; car selon la température de l'air, le tuyau rendra des sons qui seront entr'eux dans la raison des nombres 840714, 960771 ou dans le rapport de 8 à 9, ce qui prend plus d'un demi pied sur la longueur entiere du tuyau.

Ces altérations successives dans le son d'une même Flute achevent de confirmer le systême de M. Euler. Car les Musiciens éprouvent tous les jours dans la comparaison qu'ils ont à faire des instrumens à corde avec les instrumens à vent, que pour les mettre à l'unisson, il faut tantôt diminuer, tantôt augmenter la tension des cordes, & que la plus grande différence

eſt d'un ton majeur entier, intervalle exprimé par le rapport de 8 à 9.

On obſerve encore que les Flutes ont plus de haut dans un tems ſerein & chaud, que dans un tems froid & orageux, & qu'elles deviennent un peu plus aiguës, pendant qu'on en joüe. Ces deux phénomenes partent de la même cauſe. C'eſt que la chaleur naturelle de l'air dans un tems ſerein, ou celle qu'il reçoit pendant l'inſpiration, rend ſes vibrations un peu plus promptes, & par conſéquent le ſon un peu plus aigu; & d'ailleurs le poids de l'air *m* étant moindre, la fraction $\frac{n}{m}$ eſt plus grande, & par conſéquent le nombre des vibrations plus grand.

La force du ſon dépend dans les Flutes de la violence de l'inſpiration, & du rapport de la capacité du tuyau à ſa longueur. Il en eſt encore en ce-

la de ces instrumens, comme des cordes. La longueur & l'épaisseur de celles-ci répondent à la longueur & à la capacité de ceux-là.

Toute corde n'est pas propre à rendre tout son. Il lui faut quelquefois une certaine grosseur pour un son donné. On ne peut pas non plus augmenter ou diminuer à discretion la capacité d'une Flute de longueur donnée. Il y a des limites au-delà desquelles elle ne résonne plus. Mais appliquant aux tuyaux à bouche, ce que nous avons dit de la longueur, du poids & de la tension des cordes; pour en tirer des sons uniformes, il faut faire la base ou la capacité proportionelle à la longueur, & la longueur proportionelle à la pression de l'athmosphere qui est toujours proportionelle à l'ouverture.

Quant à l'inspiration, elle a aussi ses loix. Trop foible, la Flute ne rend

point de ſon. Trop forte, elle fait réſonner la Flute une octave au-deſſus de ſon ton. Plus forte encore, elle rendra la douziéme, la quinziéme & ainſi de ſuite.

Pour découvrir le rapport de ces dégrés ſucceſſifs, nous ſerons forcés de revenir aux cordes & d'en examiner quelques propriétés. En attendant, nous obſerverons que, la force du ſon dans les Flutes étant proportionelle à celle de l'inſpiration; plus l'inſpiration ſera violente, le ſon demeurant le même quant au degré du grave à l'aigu; plus les vibrations de l'air contenu dans le tuyau ſeront grandes, ſans toutesfois qu'elles en deviennent plus fréquentes. Mais la grandeur ou l'amplitude des vibrations eſt tellement déterminée par la capacité ou le diamétre de la Flute, que le même ſon ne peut pas ſubſiſter & conſerver ſon dégré, dans toutes les variations

possibles de l'inspiration. Il faut même qu'après avoir passé successivement par différens dégrés du grave à l'aigu, il s'éteigne entiérement.

X.

Ce paragraphe sera sans doute un des meilleurs de ce Mémoire, je le dois presqu'en entier à M. de Fontenelle. Cet Auteur dit ingénieusement à son ordinaire, Hist. de l'Acad. ann. 1700, qu'une recherche ou même une découverte n'est, pour ainsi parler, que l'épisode d'une autre. M. Sauveur, ajoute-t-il, en examinant la théorie de certains instrumens qui vont par *sauts* & passent irréguliérement d'un ton à un autre, fut obligé, pour en rendre raison, de recourir à des expériences qui lui produisirent un phénomene dont il fut extrémement surpris; car quel Philosophe auroit cru qu'un corps mis en mouve-

ment de maniére que toutes ses parties y doivent être, en conservent cependant quelques unes immobiles dans de certains intervalles, ou plutôt en rend quelquesunes immobiles par une distribution singuliere qu'il semble faire entr'elles du mouvement qu'il a reçû.

Si une corde d'instrument est tenduë sur une table, & qu'un chevalet mobile qui glisse sous la corde soit arrêté à quelqu'un de ses points, ensorte que, quand on pincera par le milieu l'une des deux parties déterminées par la position du chevalet, l'autre ne participe point du tout à l'ébranlement, on sçait que le ton de la partie pincée, sera au ton de toute la corde, en raison des longueurs de cette partie & de la corde entiére. Si cette partie est $\frac{1}{4}$, elle sera à la double octave en haut de toute la corde. Si elle est $\frac{1}{2}$, elle sera à son octave; & si

au lieu de pincer $\frac{1}{4}$, on pinçoit la partie $\frac{3}{4}$, il eſt encore indubitable que les longueurs de cette partie & de la corde entiere étant comme 3 à 4, l'une réſonneroit la quarte de l'autre.

Mais ſi le chevaler n'empêche pas entiérement la communication des vibrations des deux parties ; ſi ce n'eſt qu'un obſtacle leger, comme le bout d'une plume ; ſi la corde eſt menuë, les deux parties, quoiqu'inégales, rendront le même ton & formeront le même intervalle avec la corde entiére.

Il ne feroit pas étonnant qu'elles fuſſent toutes deux à l'uniſſon de la corde entiére ; on concevroit alors que l'obſtacle leger ne les empêcheroit pas de faire les mêmes vibrations que la corde entiére, & qu'il ne tiendroit lieu de rien. Mais il eſt effectivement obſtacle ; il détermine les parties de la corde à être effectivement

parties & à rendre un ſon différent de la toute, & le merveilleux eſt qu'il laiſſe le même ton à des parties inégales. Si, par exemple, l'obſtacle eſt au quart de la corde, non-ſeulement ce quart étant pincé rend la double oƈtave aiguë de la toute; mais l'autre partie qui eſt trois quarts & qui devroit donner la quarte de la toute, donne la même double oƈtave.

Sur ce phénomene ſi bizarre, M. Sauveur imagina que, puiſque $\frac{3}{4}$ rendoient le même ton que $\frac{1}{4}$, ils ne devoient pas faire des vibrations proportionnées à leurs longueurs; qu'il falloit qu'ils ſe partageaſſent en trois parties égales chacune au premier quart, & qui fiſſent chacune leurs vibrations ſéparément. En ce cas, c'eût été la même choſe que ſi l'on eût pincé à la fois ces trois parties égales. Elles euſſent été toutes à l'uniſſon entr'elles & avec le premier quart; c'eſt-à-dire

à la double octave aiguë de la corde entiére. Mais cela supposé comme vrai, il y auroit donc eu nécessairement entre les vibrations de deux parties égales un point immobile qui ne suivoit ni l'une ni l'autre vibration, & par conséquent deux points immobiles sur les $\frac{1}{9}$ de la corde, & 3 dans la corde entiére; en comptant pour un de ces points celui où est posé l'obstacle léger, parce qu'il est effectivement entre deux vibrations. M. Sauveur appelle ces vibrations partielles & séparées, ondulations; leurs points immobiles, nœuds; & le point du milieu de chaque vibration, le ventre de l'ondulation.

Lorsque M. Sauveur apporta à l'Académie cette expérience de deux tons égaux sur les deux parties inégales d'une corde, elle y fut reçûe avec tout le plaisir que font les nouvelles découvertes. Mais quelqu'un de la

compagnie se souvint qu'elle étoit déja dans un ouvrage de M. Wallis. Quant à la pensée des nœuds qui n'étoit qu'un petit systême, on trouva dans l'assemblée le moyen d'éprouver si elle étoit vraye. On mit sur les points de la corde où, suivant la supposition, se devoient faire les nœuds & les ventres des ondulations, de très-petits morceaux de papier à demi pliés qui pouvoient tomber sans peine au moindre mouvement. On pinça la corde & l'on vit avec contentement & même avec admiration que les petits papiers des ventres tomberent aussi-tôt, & que ceux des nœuds demeurerent en place; dans la suite pour les distinguer mieux, on fit les uns rouges & on laissa les autres blancs; desorte que les rouges & les blancs étoient disposés alternativement, & l'on vit toujours qu'il n'y avoit que ceux d'une couleur qui tombassent. Les points qui d'espa-

ce en espace se maintiennent immobiles entre tous les autres points qui se meuvent, & dans un corps qui auroit dû prendre du mouvement selon toute sa longueur, auroient été sans doute une grande merveille pour un Physicien qui n'y auroit pas été préparé & amené par dégrés.

Il paroît par là que l'obstacle léger placé comme nous l'avons supposé jusqu'ici sur un quart de la corde, n'empêche pas à la vérité la communication des vibrations de deux parties de la corde, parce qu'il est léger; mais qu'au moins il empêche une communication facile, parce qu'il est obstacle. Il détermine d'abord les deux parties à faire séparément & indépendemment l'une de l'autre, leurs vibrations. Mais comme elles sont inégales, la plus petite fait ses vibrations beaucoup plus vite, & parce qu'elle communique toujours avec l'autre qui

eſt beaucoup plus lente, elle la hâte & la force à ſuivre ſon mouvement. Or cette partie plus grande ne peut jamais, à cauſe de ſa longueur, faire ſes vibrations en même tems que la plus petite, & lui obéir, à moins qu'elle ne ſe partage en parties toutes égales à cette partie qui domine à cauſe de ſa viteſſe.

Si au lieu de mettre l'obſtacle ſur $\frac{1}{4}$, on le met ſur $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, &c. ce ſera toujours la même choſe & le ton des $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$,&c. ne ſera que celui de $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, &c. en un mot, l'obſtacle léger étant poſé ſur une partie aliquote quelconque de la toute, c'eſt elle ſeule qui donne le ton à la partie plus grande qui eſt de l'autre côté.

Mais ſi l'obſtacle n'eſt point ſur une partie aliquote; par exemple, ſi la corde ayant cinq parties, il eſt ſur les $\frac{2}{5}$; ces $\frac{2}{5}$ forçant d'abord les $\frac{3}{5}$ qui ſont de l'autre côté à prendre une viteſſe égale

à

à la leur, ces $\frac{3}{5}$ ne la peuvent prendre qu'en s'accourciſſant & en s'égalant aux $\frac{2}{5}$. Il reſte donc $\frac{1}{5}$ qui eſt la plus petite partie & dont les vibrations ſont les plus promptes. Cette petite partie qui n'a point été déterminée d'abord par la poſition de l'obſtacle, & qui ne ſe forme que dans la ſuite & par une conſéquence de la formation des autres, ne laiſſe pas de donner la loi à tout le reſte, & les $\frac{2}{5}$ & les $\frac{3}{5}$ ne rendront le ton que de $\frac{1}{5}$. Si l'obſtacle étoit mis ſur $\frac{4}{7}$, il eſt évident par la même raiſon qu'elle ſe partageroit auſſi en 7 parties ; c'eſt la même choſe pour tous les autres cas ſemblables.

En appliquant cette hypotheſe ſur trois vingtiémes, il ſemble que ces $\frac{3}{20}$ partageant d'abord la corde en parties égales à elles, il reſteroit pour petite partie qui devroit dominer le reſte $\frac{2}{20}$ ou $\frac{1}{10}$, & qu'ainſi la corde ſe partageroit en dixiémes. Mais il faut

remarquer que l'obſtacle doit toujours former un nœud à l'endroit où il eſt, parce qu'effectivement il arrête en partie les vibrations & qu'il eſt le premier principe qui les change. Or dans l'hypotheſe preſente, ſi la corde ſe partageoit en dixiémes, l'obſtacle ſe trouveroit ſur un ventre & non ſur un nœud; ce qui eſt impoſſible, & par conſéquent il faut que la corde ſe partage en vingtiémes.

Donc, que l'obſtacle ſoit mis ſur une partie aliquote ou non, la corde ſe partagera toujours dans le nombre de parties marqué par le dénominateur de la fraction.

Il s'enſuit de-là que quelques différentes que ſoient les parties où l'on met l'obſtacle, le ton eſt le même toutes les fois que le dénominateur de la fraction eſt néceſſairement le même. Par exemple, la corde étant de 20 parties, il ſera indifférent de mettre

l'obstacle sur $\frac{1}{20}$, $\frac{3}{20}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{9}{20}$, $\frac{11}{20}$, $\frac{13}{20}$, $\frac{17}{20}$, $\frac{19}{20}$. Mais non pas sur $\frac{2}{20}$, $\frac{4}{20}$, $\frac{5}{20}$, &c. parce que ces fractions pouvant se réduire, le dénominateur n'est pas nécessairement le même.

En faisant couler l'obstacle sous les 20 divisions de la corde, il est aisé de voir quels sont les nœuds ou intervalles des sons des différentes parties de la corde, comparés au son de la corde entiere. En voici une petite Table tirée de l'Hist. de l'Acad.

TABLE

Parties de la corde divisée en vingtiémes.	*Intervalles rendus par les différentes parties relativement à la corde entiére.*
$\frac{1}{20}$, $\frac{3}{20}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{9}{20}$, $\frac{11}{20}$, $\frac{13}{20}$, $\frac{17}{20}$, $\frac{19}{20}$.	$\frac{1}{16}$ est la quatriéme octave de 1.

$\frac{1}{16}$ & $\frac{1}{20}$ sont entr'eux comme 4 à 5, expression de la tierce majeure. C'est-à-dire, que si l'on divise une corde 1 en vingtiémes, &

que si l'on met d'un côté d'un obstacle léger $\frac{1}{20}$, & de l'autre $\frac{19}{20}$, ou $\frac{3}{20}$ & $\frac{17}{20}$ ou $\frac{7}{20}$ & $\frac{13}{20}$, &c. les sons rendus par les deux parties de la corde feront une tierce majeure avec la quatriéme octave de la corde entiére.

Ou $\frac{2}{30}$ $\frac{1}{10}$ — $\frac{1}{8}$ est la troisiéme octave de 1. Or les sons rendus par $\frac{1}{8}$ & $\frac{1}{10}$ sont entr'eux réciproquement comme ces longueurs, c'est-à-dire, comme 8 à 10, ou 4 à 5, tierce majeure. Donc les parties de la corde entiére $\frac{2}{10}$ & $\frac{18}{10}$, & $\frac{1}{10}$ & $\frac{9}{10}$ divisée par un obstacle léger, donneront des sons qui seront à la tierce majeure de la troisiéme octave aiguë de la corde entiére.

Ou $\frac{4}{20}$ $\frac{1}{5}$ — $\frac{1}{4}$ est la seconde octave de 1. Mais les sons rendus par $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{5}$, sont entr'eux réciproquement comme ces longueurs ou comme 4 à 5, c'est-à-dire, qu'ils seront à la tierce majeure

de la feconde octave de 1 ou de la corde entiére.

REMARQUE.

Une expérience qui méritoit bien d'être faite & qu'il ne paroît pas qu'on ait tentée ; c'eût été de divifer la corde entiére en parties égales, & une de ces parties égales en deux autres qui euffent un rapport incommenfurable entr'elles, comme celui de 1 à $\sqrt{2}$, ou $\sqrt{3}$, ou $\sqrt{5}$, & de laiffer l'incommenfurable d'un côté de l'obftacle léger & le refte de la corde de l'autre.

QUESTIONS.

Si les deux parties dans lefquelles la corde entiére eft divifée par l'obftacle léger, font incommenfurables entr'elles.

1°. Quel fera le fon rendu par les deux parties.

2°. Quel rapport aura ce fon avec

celui de la corde entiére.

3°. Y aura-t-il ſur la corde pincée, après avoir ainſi placé l'obſtacle léger, des ondulations, des nœuds, des ventres & des points immobiles.

4°. Dans la ſuppoſition qu'il y ait des nœuds, où ſeront-ils placés.

REPONSE.

Lorſque les parties de la corde ſont incommenſurables, n'arrivera-t-il pas un phénomene analogue à celui que raportent quelques Auteurs d'optique qu'il a ſi fort embarraſſés. C'eſt la viſion confuſe de l'objet, lorſque les rayons refléchis ou rompus, entrent dans l'œil convergens ; c'eſt-à-dire, comme s'ils venoient d'un point placé derriere l'œil. Si cela eſt ; voilà des choſes communes, entre deux ſenſations d'une eſpece bien différente.

Il eſt évident qu'en continuant la Table précédente, le mouvement

de l'obſtacle léger, toujours promené de l'une de ces parties à l'autre, produiroit une ſuite irréguliére de tons, tantôt les mêmes, tantôt différens, & qu'un inſtrument de Muſique en qui il ſe trouveroit quelque choſe de pareil, feroit ce qu'on appelle des ſauts & paſſeroit d'un ton à l'autre, ou reviendroit au même, ſans aucune proportion ſenſible, ſans dégrés ſucceſſifs & contre toutes regles connuës. Auſſi la Trompette marine qui n'eſt qu'un monocorde où le doigt tient lieu de l'obſtacle léger a-t-elle de ces bizarreries qui avoient été inexplicables juſqu'à M. Sauveur, & qui deviennent fort claires par le ſyſtême des ondulations. La Trompette ordinaire, le Cors de chaſſe, les grands inſtrumens à vent ſont pareillement ſujets à ces irrégularités, elles naiſſent de la violence de l'inſpiration. Si les deux moitiés de l'inſtrument ſont

féparement leurs oscillations, le son monte à l'octave. Si la force de l'inspiration étant augmentée, les tiers de l'instrument, ou plutôt de l'air qu'il contient, font séparement leurs oscillations, on aura la douziéme. Si on augmente successivement l'inspiration & qu'on fasse osciller les $\frac{1}{4}$, les $\frac{1}{5}$ & les $\frac{1}{6}$, &c. l'instrument fera des sauts & rendra des sons dont il est facile de connoître le rapport au son le plus grave.

La division de l'air contenu dans les tuyaux des flutes, suit cette progression $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}$, &c. & quoique la nature des Cors de chasse, des Clairons, & des Trompettes ne soit pas tout-à-fait la même que celle de ces instrumens, l'inspiration produit en eux les mêmes divisions. D'où il est aisé de conclure qu'ils n'ont aucun son moyen entre la premiere octave & la seconde, qu'un

ſeul ſon moyen entre la ſeconde octave & la troiſiéme ; que trois ſons moyens entre la troiſiéme octave & la quatriéme, &c.

On peut propoſer ici un problême. La longueur de la Flute & ſon ouverture étant données, trouver la force de l'inſpiration pour que l'inſtrument faſſe des ſauts, paſſe par exemple de la premiere octave 1 à la ſeconde $\frac{1}{2}$.

Voici comment je le reſous. Il eſt à préſumer que les deux parties de l'air contenu dans l'inſtrument ne commencent à oſciller ſéparement, que lorſque l'inſpiration a été aſſez forte pour donner à l'air entier la plus grande vibration qu'il peut exercer & le couper, pour ainſi dire, en deux parties égales. Mais en conſidérant, comme nous avons fait juſqu'à preſent & comme le calcul & l'expérience nous y autoriſoient, l'air contenu dans la

Flute, comme une corde dont le poids de l'atmoſphere étoit le poids tendant, il eſt évident que la plus grande oſcillation de l'air contenu dans la Flute repondra au plus grand écart de la corde. Or nous avons trouvé le plus grand écart de la corde, la force pulſante étant donnée; nous trouverons donc ici par la même voye & par la même formule, la force pulſante, ou la violence de l'inſpiration, ſi le plus grand écart eſt donné. Mais le plus grand écart eſt donné; c'eſt le diamétre de l'ouverture de la Flute; donc nous aurons la violence de l'inſpiration ou la force pulſante $F = \frac{2a\sqrt{PG}}{\sqrt{L}}$.

La même formule aura lieu pour tous les autres ſauts, en ſuppoſant la Flute racourcie: ainſi veut-on avoir la violence de l'inſpiration, pour que l'air contenu ſe diviſe en trois parties, & par conſéquent pour que la Flute faſſe

le faut $\frac{1}{3}$, on n'a qu'à employer dans la formule au lieu de L, $\frac{2L}{3}$, & ainsi des autres sauts.

On observera que tout ce que j'ai dit jusqu'à present concerne les tuyaux prismatiques & cylindriques. Il seroit peut-être plus difficile de déterminer leurs sons, s'ils étoient supposés de quelque figure dont les côtés fussent convergens ou divergens. Mais on pourroit toujours rapporter l'air qu'ils contiendroit à une corde, le poids de l'atmosphere au poids tendant, & resoudre les problêmes par les formules que nous avons données.

On peut tirer de ce que nous avons dit sur les Flutes une maniere de fixer le son. Ce sera le sujet de ce dernier paragraphe.

X I.

Avant qu'une corde, dont la longueur est 2, soit accourcie jusqu'à n'ê-

tre plus que 1, c'eſt-à-dire, à l'octave en haut du ſon qu'elle rendoit auparavant, elle peut paſſer par autant de diviſions que l'on voudra. M. Sauveur dans ſon nouveau ſyſtême de Muſique, fixe ce nombre de diviſions à 43, & ces 43 parties qu'il appelle *mérides* & qui rempliſſent toute l'étenduë de l'octave, donnent les tons les plus ſenſibles & les plus ordinaires qui y ſoient compris. Mais ſi l'on veut aller à des diviſions de ſons plus délicates, il faut encore diviſer chaque méride en 7 parties qui s'appelleront *eptamérides*; & l'on aura par conſéquent dans une octave 301 eptamérides.

Les vibrations de deux cordes égales doivent toujours aller enſemble, commencer, finir, recommencer dans le même inſtant. Mais celles de deux cordes inégales, doivent être tantôt ſéparées & tantôt réunies, & d'autant

plus long-tems ſéparées que les nombres qui expriment l'inégalité de ces cordes ſeront plus grands. Car que deux cordes ſoient entr'elles comme 1 à 2, & qu'elles commencent en même tems leurs vibrations, il eſt évident par tout ce que nous avons dit juſqu'à preſent, qu'après deux vibrations de la plus courte & de la plus aiguë & une vibration de l'autre, elles recommenceront à partir enſemble, & qu'ainſi ſur deux vibrations de la plus courte, il y aura toujours une réunion de vibrations de toutes les deux. Si elles étoient comme 24 à 25, il n'y auroit une réunion de leurs vibrations qu'à chaque vingt-cinquiéme vibration, & il eſt clair que pour de plus grands nombres les réunions ſont encore plus rares.

Voilà bien des rapports, mais rien d'abſolu. Pour s'entendre, il faudroit fixer un terme au-deſſus duquel on prit

les tons aigus, & au-dessous, les tons graves. A cet effet, on s'est servi, & on se sert encore d'un petit tuyau de bois ou de métal, ajusté à l'extrémité d'un souflet chargé d'un poids qui en chasse l'air & qui fait résonner le tuyau. Cet instrument s'appelle un ton. Ce nom lui vient de son usage ; car c'est par son moyen que l'on détermine le ton sur lequel les voix & les instrumens doivent s'accorder dans un concert. Et comme les Musiciens souhaitent que ce ton soit toujours le même, ils supposent que l'instrument dont ils usent pour le retrouver d'un jour à l'autre, le rend exactement. Supposition qui n'est pas vraye à la rigueur; car 1°. Un tuyau d'orgue de quatre pieds, qui par sa nature est beaucoup plus juste qu'un petit instrument de bois ou de métal, ne donne pas toujours le même son. 2°. La matiere du petit tuyau étant susceptible d'alté-

ration, le ſeul uſage qu'on en fait, le tems, cent autres accidens doivent en changer ſenſiblement le ſon au bout de quelques années. 3°. Il eſt conſtant que l'inſpiration plus ou moins forte hauſſe ou baiſſe le ſon dans un tuyau. 4°. Les changemens qui ſe font dans le poids & la chaleur de l'atmoſphere, &c.

Ce ſont ces raiſons & d'autres qui déterminerent M. Sauveur à chercher par une autre méthode à fixer le ſon. On peut voir de quelle maniere il s'y prit, dans l'Hiſt. de l'Acad. ann. 1700. pag. 137. & quel fut ſon ſuccès. Lorſque M. Sauveur communiqua ſes vûës à l'Académie, on penſa d'abord, dit M. de Fontenelle, à s'aſſurer des expériences ſur leſquelles il fondoit la détermination du ſon fixe, & des Commiſſaires furent nommés à cet effet. M. Sauveur en rendit compte lui-même & avoua que pour cette fois

elles n'avoient pas réussi. La difficulté de les recommmencer, l'appareil qu'il faut pour cela, furent cause qu'on en demeura là. Soit donc qu'il y eût de l'incertitude dans la méthode de M. Sauveur, ou beaucoup de difficulté à s'en servir, le petit tuyau prévalut & continua de donner le ton dans la Chapelle & dans l'Opera.

Cependant les objections qu'on peut faire contre cet instrument sont solides, & je ne doute nullement qu'en l'employant sans précaution, il ne donne en différentes contrées, & dans un même lieu sous différentes températures de l'air, le ton ou un peu plus haut ou un peu plus bas. Mais n'y auroit-il pas moyen d'obvier aux altérations qui surviennent, soit dans la matiere de l'instrument, soit dans le poids tendant, ou dans l'atmosphere. C'est surquoi je vais communiquer mes conjectures.

J'ai décrit plus haut la conſtruction du ton tel que nous l'employons aujourd'hui, voici comment je déſirerois qu'on le corrigeât.

Je voudrois qu'il fut composé de deux parties mobiles en vertu deſquelles il put s'allonger ou s'accourcir. Car après cela, il ne s'agiroit plus que de ſçavoir quand & de combien précisément il faudroit l'allonger ou l'accourcir, pour lui conſerver le même ſon.

Pour parvenir à cette connoiſſance, revoyons les cauſes qui produiſent de l'altération dans le ton, tel que nous l'avons. S'il n'y en a que trois, & que nous puiſſions prévenir l'une & calculer les effets des deux autres, il ne ſera pas difficile de conſerver le même ſon au ton composé de deux parties mobiles.

L'altération de l'atmoſphere quant au poids; ſon altération quant à la

chaleur, & les changemens que ces deux causes occasionnent dans la matiere de l'instrument, sont les trois inconvéniens ausquels il faut rémédier.

On remédiera au dernier en donnant au ton une extrême épaisseur rélativement à sa longueur, & en le construisant du métal sur lequel le froid & le chaud font le moins d'impression. Cette précaution est d'autant plus sûre, qu'il n'y a que le changement dans la longueur d'un tuyau qui en rende le son plus ou moins aigu ; ainsi que l'expérience nous l'apprend & que nous l'avons trouvé par le calcul.

Pour ce qui regarde la température de l'air, le Thermometre indiquera les vicissitudes de l'état de l'atmosphere quant à la chaleur ; & le Barometre, ses altérations quant à sa pesanteur. Il ne seroit plus question que de graduer le tuyau mobile, eu égard

aux effets de ces deux causes, pour le même lieu, & eu égard aux mêmes effets & au poids du mercure, pour deux différens lieux de la Terre.

Des expériences réitérées apprendroient ce que la premiere, ou les vicissitudes de l'état de l'atmosphere quant à la chaleur, produisent sur le son; & le moyen de faire ces expériences, ce seroit d'avoir deux monocordes à l'unisson, & de les placer en deux endroits où la chaleur de l'air fût fort différente, & assez voisins pour qu'on put les entendre en même tems & comparer les sons qu'ils rendroient.

Le calcul donneroit exactement les effets de l'altération de l'atmosphere quant à son poids. Car connoissant la plus grande & la plus petite hauteur du vif-argent dans le Barométre, on trouveroit aisément le ton pour ces grande & petite hauteurs & pour tou-

tes les intermédiaires, & par conséquent la quantité précise dont il faudroit allonger ou accourcir l'instrument d'un moment à l'autre, pour lui conserver le même son.

Quand à l'aide de l'expérience & du calcul, on auroit gradué un tel instrument, je crois qu'on pourroit se promettre d'exécuter un Concert dans dix ans & à mille lieues sur le même ton qu'on l'auroit exécuté aujourd'hui à Paris. On n'auroit pour cela qu'à sçavoir quelles étoient les hauteurs du Barométre & du Thermométre à Paris; & consulter ailleurs ou dans un autre tems, les mêmes machines pour en appendre de combien il seroit à propos d'allonger ou d'accourcir le ton gradué; à moins qu'il ne fallut le laisser au même dégré, ce qu'elles diroient aussi. Si le Thermométre demandoit qu'on l'allongeât d'une partie, & le Barométre d'un autre, on

l'allongeroit de deux, & ainſi pour toute autre ſuppoſition.

Il n'y a plus que l'inſpiration plus ou moins forte qui put tromper l'attente. Mais quiconque ſçait emboucher un inſtrument, ménagera ſon haleine de maniere à ne pas faire ſauter le ton; ce qui ſuffira, car il n'importe aucunement qu'il ſoit plus ou moins fort. Il ne s'agit que de ne point occaſionner de ſauts à l'inſtrument, ce qui eſt toujours facile.

RESULTAT.

Pour avoir le ſon fixe, il faut donc conſtruire un inſtrument de deux parties mobiles, d'un métal ſur lequel le froid & le chaud faſſent le moins d'impreſſion.

Anéantir cette impreſſion par l'épaiſſeur conſidérable que l'on donnera au tuyau relativement à ſa longueur.

Graduer ce tuyau ſur les altérations

qui ſurviennent dans le poids tendant ou dans la peſanteur de l'atmoſphere, à l'aide du calcul & du Barométre.

Corriger cette premiere graduation par les expériences que nous avons indiquées ſur les effets de la chaleur, dont le Thermométre indiquera la quantité.

Cette préparation ſuffit pour un même lieu de la Terre; mais il faudra encore avoir égard à la peſanteur du mercure, pour deux lieux différens.

OBJECTION.

Ce ſyſtême de la graduation d'un tuyau composé de deux parties mobiles, ſuppoſe, me dira-t-on, que la différence qui ſurvient dans le poids tendant, à l'occaſion des viciſſitudes de l'atmoſphere, influe ſenſiblement ſur la longueur du tuyau. Car ſi la quantité dont il faudroit l'allonger ou le racourcir pour le conſerver au mê-

me ton, étoit peu considérable, la graduation pourroit devenir impratiquable, & l'expédient proposé pour la fixation du son, se réduire à rien.

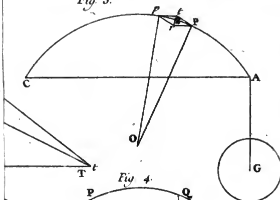
REPONSE.

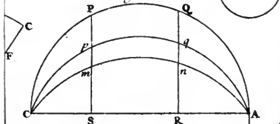
Ce raisonnement est juste, & je conviens que la graduation du tuyau est impossible, si la différence qui survient dans le poids tendant ou dans la pesanteur de l'atmosphere n'influë pas sensiblement sur la longueur du tuyau. Mais l'effet de cette différence est considérable; car selon la température de l'air, il y a tel tuyau qui rend des sons qui sont entr'eux dans la raison des nombres 840714, 960771, ou dans le rapport de 8 à 9, ainsi qu'on l'a vû ci-dessus; ce qui prend plus d'un demi-pied sur la longueur entiére d'un tuyau de 8 pieds.

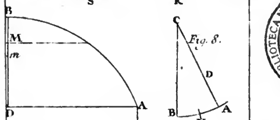
Or quel inconvenient y auroit-il à se servir d'un tuyau de cette longueur

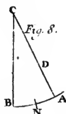
pour fixer le ſon. On auroit donc alors l'eſpace de plus d'un demi pied à graduer ; or cet eſpace eſt aſſez conſidérable pour admettre un très-grand nombre de diviſions & prometre dans la fixation du ſon toute l'exactitude qu'on peut déſirer.

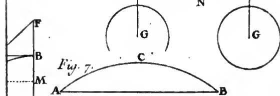
Fin du premier Mèmoire.

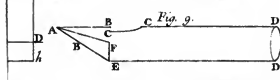

Fig. 3.
p
t
P
r
C
A
O
T
t
G


Fig. 4.
P
Q
p
q
m
n
C
S
R
A
F


B
M
m
D
A


C
Fig. 8.
D
B
N
A


F
B
M
G
G
Fig. 7.
C
A
B


A
B
C
C
Fig. 9.
D
B
F
E
D
D
h







SECOND MÉMOIRE.

Examen de la développante du Cercle.

LES Géométres ont distingué des courbes de deux espéces, des courbes géométriques & des courbes mécaniques.

Ils entendent par une courbe géométrique celle dont la nature est exprimée par une équation qui ne contient que des quantités finies; & par une courbe mécanique, celle dont la

nature ne peut s'exprimer que par une équation qui contienne des différences.

Ils ont ensuite consideré les courbes géométriques rélativement au plus grand exposant de l'abscisse ou de l'ordonnée ; ou plus généralement, rélativement à la dimension du produit le plus grand que forment les variables, soit séparées, soit mêlées ensemble, dans les équations qui expriment la nature de ces courbes ; & ils en ont fait différens genres selon ce plus haut exposant de l'abscisse & de l'ordonnée, ou selon cette dimension du plus grand produit que forment les variables, soit séparées, soit mêlées.

Ainsi ils ont appellé courbes du second genre, celles dont la nature est exprimée par des équations où 2 est le plus haut exposant de l'abscisse x, ou de l'ordonnée y ; ou par des équations dans lesquelles xy produit de

deux dimensions est le plus haut qui s'y rencontre. De même que, selon eux, les courbes du troisiéme genre, sont celles dont la nature est exprimée par des équations où 3 est le plus haut exposant de l'abscisse x, ou de l'ordonnée y; ou par des équations dans lesquelles il ne se rencontre point de plus haut produit, que xyy ou xxy de trois dimensions, & ainsi de suite.

Je n'ai garde de traiter ces distinctions d'arbitraires; elles sont fondées dans la nature des choses. Il y a en effet des courbes dont l'équation contient nécessairement des différences & d'autres dont l'équation n'en contient point; des courbes dont la nature s'exprime par une équation où le plus haut produit des variables n'est que de deux dimensions, & d'autres dont la nature s'exprime par une équation ou ce produit est de trois, quatre, cinq, &c. dimensions.

Mais je crains bien qu'on n'ait eu trop d'égard à ces distinctions, & que par je ne sçais quelle délicatesse, on n'ait pas fait des courbes mécaniques autant d'usage qu'on auroit pû, & qu'on n'ait attaché une élegance imaginaire à n'employer dans la construction des équations qu'une courbe d'un certain genre, dans des cas où une courbe d'un genre supérieur satisfaisoit également, & se traçoit avec plus de facilité.

Cependant Newton & Leibnitz, dont l'autorité étoit assez grande en Mathématiques pour entraîner le reste des Géométres, ont reconnu, il y a long-tems, que les courbes géométriques d'une construction simple devoient être préférées dans la solution des Problêmes à des courbes d'une équation moins compliquée, mais d'une construction plus difficile ; & c'est par cette seule raison que tous les

Géométres abandonnent unanimement la parabole pour le cercle, sans en excepter Descartes qui, perdant ailleurs de vûë la facilité de la description; prononce généralement que dans les constructions des équations, il faut bien se garder d'employer une courbe d'un genre supérieur, quand celle d'un genre inférieur suffit.

Mais pourquoi n'en seroit-il pas des courbes mécaniques, lorsqu'elles sont faciles à décrire, ainsi que des courbes géométriques qui ont cet avantage? Cette question est d'autant plus fondée que la description d'une ligne géométrique quelconque, même du cercle & de la ligne droite, est une opération mécanique & toujours sujette à erreur, mais que la Géométrie suppose exacte.

Cette science n'auroit-elle de l'indulgence que dans ces deux occasions? Si l'on augmentoit le nombre

de ſes inſtrumens d'un nouveau compas qui fût d'un uſage auſſi ſûr & auſſi exact que celui dont on ſe ſert pour tracer le cercle & qui facilitât un grand nombre d'opérations, ſeroit-elle bien fondée à le rejetter?

Si deux branches de cuivre ou d'acier ſont aſſemblées fixement en un point, & que l'extrémité de l'une tourne autour de l'extrémité de l'autre, la premiere tracera ſur un plan une courbe fort connue.

Si vous enveloppez un cercle de cuivre ou d'acier d'une chaîne fort mince; l'extrémité de cette chaîne tracera, ſoit en s'enveloppant, ſoit en ſe dévéloppant, une courbe dont perſonne, à ce que je crois, n'a encore recherché les propriétés.

Le premier de ces inſtrumens eſt un compas ordinaire, & la courbe tracée eſt un cercle : le ſecond eſt le compas que je propoſe, & la courbe

tracée fera la dévelopante du cercle.

Or conçoit-on que l'un foit plus fimple que l'autre, & que la defcription du cercle puiffe être plus facile & plus rigoureufe que celle de fa dévelopante.

C'eft la facilité qu'on a de tracer cette dévelopante, & la multitude des cas où fa defcription peut avoir lieu qui m'ont déterminé à en examiner les propriétés. Je fouhaite que le peu que j'en ai découvert, engage, finon les Géométres, du moins les faifeurs d'inftrumens de Mathematiques à s'en fervir. C'eft en leur faveur que j'ai laiffé dans ce Mémoire quelques Problêmes que j'en aurois bannis, fi je n'avois écrit que pour les fçavans.



PROBLEME I.

Diviser un arc de cercle AFB (Fig. 1.) *en une raison quelconque commensurable ou incommensurable. Soit par exemple, proposé de trouver le point* F, *tel que* AF *soit à* FB *comme* 1 *à* $\sqrt{5}$.

SOLUTION.

Tracez la dévelopante *ADE*, tirez de l'extrémité *B* de l'arc donné la tangente *BGE*; divisez cette tangente au point *G* en deux parties qui soient entr'elles dans la raison donnée de 1 à $\sqrt{5}$. Décrivez du rayon *CG*, l'arc *GD* qui rencontre la dévelopante en *D*. Achevez sur *CD*, qui est égale à *CG*; le triangle *CDF* entierement égal au triangle *CBG*. Je dis que le point *F* est le point cherché.

DEMONSTRATION.

Le triangle *DFC* étant tout-à-fait égal

égal au triangle *CBG*; le côté *DF* touche le cercle en *F*, donc par la nature de la dévelopante, il est égal à l'arc *AF*; il est de plus égal au côté *BG* du triangle *CBG*. Mais la ligne entiere *BGE* est égale à l'arc entier *AFB*. Donc la partie *BF* de cet arc est égale à *GE*.

$DF = BG = AF$ & $BF = GE$. Mais $BG. GE :: 1. \sqrt{5}$. Donc $AF. FB :: 1. \sqrt{5}$. Ce q. f. d.

COROLLAIRE.

On a donc par le moyen de cette dévelopante, celui d'inscrire dans un cercle, tel poligone régulier ou irrégulier qu'on désirera.

PROBLEME II.

Trouver un secteur de cercle ACD *égal à un espace quelconque donné* ab, Fig. 2.

SOLUTION.

Je fais $a . CD :: x . b$. & j'ai $x = \frac{ab}{CD}$. Je tire enſuite une tangente indéterminée au cercle donné. Je prens ſur cette tangente la partie $DE = \frac{ab}{CD}$. Je décris avec l'inſtrument que j'ai propoſé la dévelopante AE qui paſſe par le point E. Je dis que le double du ſecteur ACD eſt égal à l'eſpace donné ab.

DEMONSTRATION.

Le ſecteur $ACD = \frac{AD \times CD}{2}$. Mais $DE = AD$. Donc le ſecteur $= \frac{DE \times CD}{2}$. Subſtituez à DE ſa valeur $\frac{ab}{CD}$ & il vous viendra le ſecteur $= \frac{ab}{2}$. Donc le double du ſecteur $= ab$. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME III.

Trouver un espace rectiligne égal au secteur extérieur quelconque AHB. Fig. 3.

SOLUTION.

Prolongez le côté HA en F où ce côté soit rencontré par la ligne BCF qui part du point B & qui passe par le centre C du cercle. Prolongez cette ligne BCF en I. Tirez les perpendiculaires HI & AL. Tracez du point A la dévelopante AE, & tirez la tangente BE. Je dis que l'espace ABH $= \frac{FB \times HI}{2} - \frac{FC \times FA \times HI}{2FH} - \frac{BC \times BE}{2}$.

DEMONSTRATION.

La surface du triangle $FBH = \frac{FB \times HI}{2}$. Mais $FH . HI :: FA . AL = \frac{FA \times HI}{FH}$. Donc la surface du trian-

gle $FAC = \frac{FC \times FA \times HI}{2FH}$. Donc l'espace $ACBH = \frac{FB \times HI}{2} - \frac{FC \times FA \times HI}{2FH}$. Mais l'espace $ACB = \frac{BC \times BE}{2}$. Donc l'espace $ABH = \frac{FB \times HI}{2} - \frac{FC \times FA \times HI}{2FH} - \frac{BC \times BE}{2}$. Ce q. f. d.

PROBLEME IV.

Trouver par le moyen de la dévelopante AE *un espace rectiligne égal au segment* AQF. Voy. Fig. 4.

SOLUTION.

Prenez sur la tangente EF la ligne $EK =$ au sinus AB. Je dis que le triangle CFK est égal au segment AQF.

DEMONSTRATION.

Le triangle $CFK = \frac{CF \times FK}{2} = CE$

$\times \frac{FE - EK}{2} = \frac{CF \times \text{arc } AQF}{2} - \frac{CF \times AB}{2}$ = au secteur $ACFQ$ — le triangle ACF = au segment AQF. C. q. f. d.

PROBLEME V.

Trouver un espace rectiligne égal à une portion quelconque AFB *du segment circulaire*, AB *étant perpendiculaire ou non à* FC. Voy. Fig. 4.

SOLUTION.

Ayant mené du point B la perpendiculaire BD sur AC, on prendra sur la tangente EF, la partie $EV = BD$, & ayant joint VC, on aura le triangle CFV = à l'espace $AQFB$.

DEMONSTRATION.

$$CFV = \frac{CF \times FV}{2} = CF \times \frac{FE - EV}{2} = \frac{CF \times \text{l'arc } AQF}{2} - \frac{CF \times BD}{2} = \frac{CF \times \text{l'arc } AQF}{2} - \frac{CA \times BD}{2}$$ = au secteur

AQFC — le triangle *ABC* = l'espace curviligne *AQFB*. Ce q. f. d.

PROBLEME VI.

Trouver une ligne droite égale à une portion quelconque AEG *de la développante du cercle.*

SOLUTION.

Soient (*Fig.* 5.) du point *E* la tangente *EF* & la perpendiculaire *EO* à *CE*; que cette perpendiculaire soit rencontrée en *O* par la ligne *CF* prolongée & qui passe par le point de contengence *F*, Je dis que l'arc *AEG* est égal à la moitié de la ligne *FO*.

DEMONSTRATION.

Ayant tiré la tangente *ef* infiniment proche de *EF* & nommé *CA* ou *CF*, *a*; l'arc *AF*, *x*; l'élement *Ff*, *dx*. Les secteurs semblables *CFf*, *Eef* donne-

ront CF, $a.fF$, $dx :: EF$, x. $Ee = \frac{xdx}{a}$ & intégrant on aura $AE = \frac{xx}{2a}$. Mais à cauſe des triangles rectangles ſemblables CFE, FEO; on a CF, a. FE, $x :: FE$, x. $FO = \frac{xx}{a}$. Donc $FO = 2AE$ ou $AE = \frac{FO}{2}$. C. q. f. d.

PROBLEME VII.

Trouver un eſpace rectiligne égal à l'eſpace AFEG. Voy. Fig. 5.

SOLUTION.

Je dis que l'eſpace $AFEG$ eſt égal au tiers du triangle EFO.

DEMONSTRATION.

Le ſecteur élementaire $Efe = \frac{Ee \times EF}{2} = \frac{xxdx}{2a}$, par la propoſition précédente, dont l'intégrale donne l'eſpace $AFEG = \frac{x^3}{2.3a}$. Mais le trian-

gle $EFO = \frac{EF \times FO}{2} = \frac{x^3}{2a}$. Donc l'eſpace $AFEG = \frac{1}{3}$ du triangle EFO. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Si l'on prend $FK = \frac{1}{3} FO$ & qu'on tire EK. Je dis que le triangle CEK ſera égal à l'eſpace mixtiligne $CAGEF$.

Car $EFK = AGEF$ & $CFE = CABF$. Donc $CABF + AGEF$ ou l'eſpace mixtiligne $CAGEF = CFE + EFK$ ou CEK.

COROLLAIRE II.

Si on retranche des eſpaces CEK; $CAGEF$, la partie commune CEF, on aura $CAGE = EKF = \frac{1}{3} FEO = AGEF$.

Ce que l'on peut démontrer encore en cette ſorte. $CEF = CABF$. Donc en ôtant la partie commune CBF, reſte $BEF = CBA$, & ajoutant de part & d'autre $BAGE$, on a $CAGE = AGEF$.

COROLLAIRE III.

Si l'on avoit la rectification d'un arc de cercle quelconque, la dévelopante donneroit la quadrature du cercle. Parce que faisant de la ligne droite une tangente au cercle, à l'extrémité de l'arc auquel elle seroit égale, l'autre extrémité de cet arc seroit l'origine de la dévelopante. Or on va voir qu'un point de la courbe étant donné avec son origine, on a la quadrature du cercle.

COROLLAIRE IV.

Si, le point *E* de la dévelopante, la rectification de la partie *AE*, la quadrature de l'espace *CAE*, étant donnés, on peut trouver l'origine *A* de la courbe, on aura la quadrature du cercle, car *FA* sera toujours égale à *FE*.

COROLLAIRE V.

Si l'on peut trouver la quadrature du segment *AGE* ; la ratification de la partie de la courbe *AGE*, le point *E* de la courbe, la quadrature de l'espace *CAGE*, étant donnés; sans supposer l'origine de la courbe donnée; on aura bientôt cette origine ; car ôtant de l'espace quarrable *CAGE*, l'espace *AGE*, il restera la surface du triangle *CAE* dont les deux côtés *CA*, *CE* sont donnés de longueur, le côté *CE* de position & le lieu du sommet *A* dans la circonférence du cercle. Mais par le Corollaire précédent, si l'on a l'origine de la courbe *A* & le point *E*, on a la quadrature du cercle.



RROBLEME VIII.

L'origine de la dévelopante A E *étant donnée, avec un de ses points* E, *trouver ses autres points.* Fig. 6.

SOLUTION.

Tirez du point *E* la tangente *FE.* Divisez l'arc *AF* en un certain nombre de parties égales *Aa, aa, aa,* &c. Divisez la tangente *FE* en un même nombre de parties égales. Prenez l'arc *Ff* = une des parties égales de l'arc *AF.* Tirez la tangente *fe.* Prenez *fe* = *FE* + une des parties égales de *FE.* Je dis que l'extrémité *e* de la ligne *fe* appartiendra à la dévelopante.

DEMONSTRATION.

Il est évident que chaque partie de la tangente *FE* est égale à chaque par-

tie *Aa*, de l'arc *AF* ; donc si l'on augmente l'arc *AF* d'une partie égale aux précédentes, il faudra pareillement augmenter la tangente *FE* d'une partie égale à une de celles dans lesquelles on l'a divisée, pour avoir une ligne *fe* qui soit toujours égale à l'arc *Af* & qui étant supposée tangente en *f*, ait son extrémité dans la dévelopante.

PROBLEME IX.

Deux points E, E, (Fig. 6.) *de la dévelopante étant donnés, trouver les autres.*

SOLUTION.

Tirez les tangentes *EF*, *fe* ; prenez l'arc $Fa = Ff$. Tirez la tangente *aE*. Il est évident qu'il doit y avoir la même différence de *aE* à *FE* ; que de *FE* à *fe*.

On peut encore diviser l'arc *Ff* en

un certain nombre de parties égales, & partager la différence de *fe* à *FE* en un même nombre de parties égales. On voit, sans qu'il soit besoin de le démontrer, qu'en faisant *Fa* égale à une des parties de l'arc *Ff*, & *aE* égale à *FE* moins une des parties de la différence de *fe* à *FE*; l'extrémité de *aE* appartiendra à la développante.

PROBLEME X.

Trouver le centre de gravité d'un arc circulaire AF. Voy. Fig. 7.

SOLUTION.

Tirez la ligne *CP* qui divise l'arc *AF* par la moitié. La tangente *PO* & le sinus *AV*. Joignez *CO* & menez *AI* parallele à *CP* & *IG* parallele à *OP*. Je dis que le point *G* sera le centre de gravité de l'arc.

DEMONSTRATION.

Les Géométres sçavent que le centre de gravité G, d'un arc APF doit être sur la ligne CP, à une distance du centre C, telle que $CP \times AV = CG \times AP$. C'est-à-dire, que CG soit à CP comme AV à l'arc AP ou à la tangente PO. Or c'est ce que donne la construction précédente. Car on a les triangles semblables CPO, CGI & par conséquent $CG. CP :: GI. PO :: AV. PO$. Donc, &c. Ce q. f. d.

COROLLAIRE.

Soit M le centre de gravité du secteur CAF. On sçait que $CM = \frac{2}{3} CG$. Ainsi ayant le centre de gravité G de l'arc, par le moyen de la développante AO, on aura facilement celui du secteur.

PROBLEME XI.

Construire une équation cubique de cette forme $x^3 - px = \pm q$ *; où le cube de* $\frac{p}{3}$ *est supposé plus grand ou non moindre que le quarré de* $\frac{q}{2}$. *Cette construction demande quelques préparations par lesquelles nous allons commencer.*

LEMME I.

Dans tout quadrilatere inscrit, le rectangle fait des diagonales, est égal à la somme des deux rectangles faits des deux côtés opposés. Ainsi (Fig. 8.) *je dis que dans le quadrilatere* ABCD, $AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC$.

DEMONSTRATION.

Tirez la ligne *AE*, de maniere que l'angle *BAE* soit égal à l'angle *CAD* & que vous ayez par conséquent l'angle $CAB = EAD$. Mais les angles

ABE & ACD sont égaux, de même que les angles ADE & ACB, parce que les deux premiers, de même que les deux seconds, sont appuyez sur le même arc. Donc les triangles ABE & ACD, & les triangles ADE & ACB sont semblables.

Les deux premiers donnent $AB. BE :: AC. CD$.

Les deux seconds donnent $AD. DE :: AC. CB$.

Donc $AB \times CD = AC \times BE$, & $AD \times CB = AC \times DE$. Et $AC \times DE + AC \times BE = AB \times CD + AD \times CB$. Ou $AC \times \overline{BE + DE} = AB \times CD + AD \times CB$. Ce q. f. d.

LEMME II.

Si l'on inscrit dans un cercle (Fig. 9.) *un triangle équilatéral* ACB *& que l'on tire d'un de ses angles* A *la ligne* AE, *& du point* E *les cordes* CE, EB; *je* dis

dis que la corde AE *sera égale à la somme des deux cordes* CE, BE.

DEMONSTRATION.

Par le Lemme précédent, $AE \times BC = EC \times AB + AC \times EB$. Mais par supposition, les côtés du triangle sont égaux; donc en les ôtant des deux membres de l'équation, on aura $AE = BE + EC$. Ce q. f. d.

LEMME III.

Soit ABCD, (Fig. 10.) *un arc d'un cercle donné dont le diamétre est* AF, AB *le tiers de cet arc*; AD *la corde donnée de l'arc entier; trouver la valeur de la corde de l'arc* AB.

Prenez l'arc $BC =$ l'arc BA. Faites de l'extrémité F du diamétre les arcs FE, $FG =$ l'arc AB. Tirez les cordes AB, BC, CD, AC, AD, BD & AE, EF, FG, EG. Nommez le

diamétre AF, $2a$; la corde donnée AD, $2b$; la corde AB & ses égales x, la corde AC & ses égales, y.

A cause du triangle rectangle AEF, on a $\overline{AE}^2 = 4aa - xx$. & AE ou $AG = \sqrt{4aa - xx}$. Mais les deux figures à quatre côtés $ABCD$ & $AEFG$, donneront par le Lemme 1. $yy = xx + 2bx$ & $2ay = \sqrt{4a^2 - x^2} \times 2x$, d'où l'on tire $yy = \frac{4aaxx - x^4}{aa}$. Donc $\frac{4aaxx - x^4}{aa} = xx + 2bx$, ou $x^3 - 3aax = -2aab$.

COROLLAIRE.

La corde AB est donc une des racines affirmatives de l'équation $x^3 - 3aax = -2aab$, & la corde de la troisiéme partie de l'arc qui est de l'autre côté de AD, l'autre racine positive de l'équation. Car on trouve la même chose, soit que x signifie le tiers

de l'un de ces arcs ou le tiers de l'autre. Ce qui paroîtra en appliquant le même raisonnement à l'autre arc.

Il faut seulement remarquer que la quantité positive b ne peut surpasser a; car si $2b > 2a$; alors la corde AD sera plus grande que le diamétre.

Cela posé, je passe à la solution du Problême que je me suis proposé sçavoir de construire l'équation $x^3 - px = \pm q$.

SOLUTION.

Je commence par transformer la proposée en $x^3 - 3aax = \pm 2aab$, en substituant aa à $\frac{p}{3}$ & $2a^2b$ à q. J'observe après la transformation que $\frac{p^3}{27}$ étant plus grand par supposition que $\frac{qq}{4}$; a^6 sera plus grand a^4bb, aa que bb & a que b.

Je décris ensuite, (*Fig.* 11.) un cer-

cle du rayon, a. Je tire la corde $AD = 2b$. Je trace la dévelopante AE. Je mene la tangente DE que je partage en trois parties égales; du centre O & du rayon OG, je décris l'arc de cercle GF; je conſtruis ſur $OF = OG$ le triangle OBF tout-à-fait égal au triangle ODG. Donc $BF =$ l'arc AB & $AB = \frac{1}{3} AD$.

Je prens $BC = AB$; CD ſera donc égale à AB; du point B & du côté BH; j'inſcris le triangle équilatéral BHK & je tire les cordes AB, HA, AK. Je dis qu'elles feront les trois racines de l'équation $x^3 - 3aax = \pm 2aab$.

DEMONSTRATION.

Il eſt évident par le dernier Lemme, que ſi AB eſt la corde du tiers de l'arc AD, elle ſera une des racines poſitives de l'équation $x^3 - 3aax = -2aab$. Et que la corde de la troiſiéme partie

de l'arc $AKHD$ sera l'autre racine positive de la même équation. Mais il n'est pas moins évident par la nature de la dévelopante que l'arc AB est le tiers de l'arc AD.

Et voici comment je démontre que AK est le tiers de l'arc $AKHD$.

L'arc $ABCD$ + l'arc $AKHD$ = la circonférence. Mais l'arc AB + l'arc AK sont égaux pris ensemble au tiers de la circonférence. D'ailleurs l'arc AB est égal au tiers de l'arc $ABCD$. Donc l'arc AK est égal au tiers de l'arc $AKHD$.

Donc ces deux cordes sont les racines positives de l'équation proposée, & leur somme, la troisiéme racine, en changeant le signe, parce que le second terme de l'équation manque. Mais Lemme 2. $AH = AB + AK$. Donc AH est la troisiéme racine.

Donc AB, AK, $-AH$ sont les

trois racines de $x^3 - 3aax = -2aab$. Et AB, $-AK$, $-AH$ les trois racines de $x^3 - 3aax = +2aab$.

Donc j'ai trouvé les trois racines de l'équation $x^3 - 3aax = \pm 2aab$. Donc j'ai construit l'équation proposée $x^3 - px = \pm q$.

REMARQUE.

Nous avons trouvé pour l'expression de la corde du tiers d'un arc, une équation du troisiéme dégré. Il paroît cependant au premier coup d'œil que le problême ne devroit avoir qu'une solution, car il n'y a certainement qu'une seule & unique valeur possible de la corde AC qui soutend le tiers de l'arc AB. Mais on remarquera que l'équation algébrique à laquelle nous sommes parvenus, ne renferme point les arcs AB, AC; mais seulement leurs cordes; & que par conséquent x n'est pas simplement la corde du tiers

de l'arc ACB, mais la corde du tiers de tout arc qui a AB pour corde. Or tous les arcs qui ont AB pour corde sont en nommant c la circonférence, les arcs ACB, $ACB+c$, $ACB+2c$, $ACB+3c$, $ACB+4c$, $ACB+5c$, &c. & $c-ACB$ ou ADB, $2c-ACB$, $3c-ACB$, $4c-ACB$, &c. *Fig.* 12.

Or je dis que la division de tous ces arcs en 3, fournit 3 cordes différentes & jamais plus de 3.

Car 1°. Soit le tiers de l'arc $ACB=z$, le tiers de l'arc $ACB+c=y$, le tiers de l'arc $ACB+2c,=u$. Cela donnera 3 arcs différens qui auront chacun leurs cordes. Voilà donc trois cordes différentes & par conséquent les 3 racines de l'équation.

2°. Il sembleroit d'abord que le tiers des autres arcs doit avoir aussi chacun sa corde, & que par conséquent le problême a une infinité de

solutions différentes. Mais on observera que l'arc $ACB + 3c$, a pour tiers $c + z$, dont la corde est la même que celle de z; que l'arc $ACB + AC$ a pour tiers $c + y$, dont la corde est la même que celle de y; que l'arc $ACB + 5c$ a pour tiers $c + u$, dont la corde est la même que celle de u; & ainsi de suite.

De même, on trouvera que ADB ou $c - ACB$ a pour tiers $c - u$, parce que $3c - 3u = 3c - 2c - ABC$. Or la corde de $c - u$ est la même que celle de u. Par la même raison la corde du tiers de $2c - ACB$ sera la même que celle de y, & celle de $3c - ACB$ la même que celle de z; & ainsi de suite.

Donc la division à l'infini de tous ces arcs en 3, donne 3 cordes différentes & n'en donne pas plus de trois. Voilà pourquoi le problême est du troisiéme dégré.

Si on divisoit un arc en 4 parties, on trouveroit une équation du quatriéme dégré, & on pourroit prouver de la même maniere qu'en effet cette division donne 4 cordes différentes, & jamais davantage; & en général que si l'on divise l'arc ACB en n parties, la corde de la n partie de $nc + ACB$ sera la même que la corde de la n partie de ACB, & que par conséquent le problême aura n solutions & jamais plus. Voy. à ce sujet le Dict. univ. des Scien. & des Arts, d'où j'ai tiré cet article par anticipation. Art. Trissection.

PROBLEME XII.

Une dévelopante quelconque AE *étant donnée, trouver par plusieurs points une autre dévelopante* ae Fig. 13.

SOLUTION.

Soit CA le rayon de la dévelopante donnée. Ca, celui de la dévelopante

qu'on veut tracer. On fera $Ce.CE :: Ca.CA$, & le point e sera à la développante cherchée.

DEMONSTRATION.

Décrivant les cercles AF, af, & tirant la tangente EF, & la ligne CFf, puis joignant les points C, f, on aura par la construction $CF.Cf :: CE.Ce$. Donc FE & fe sont paralleles. Donc ef touche le cercle en f. De plus $CF.Cf :: EF.ef$. Donc $ef = \frac{Cf \times EF}{CF} = Cf \times \frac{arc \times AF}{CF} =$ arc af. Donc, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME XIII.

Ayant les deux tangentes AG, GE *de la portion* AE *dont l'extrémité* A *est l'origine de la courbe, trouver le cercle générateur.* Fig. 14.

SOLUTION.

En menant les perpendiculaires *AN*, *EN* ſur les deux tangentes, & prolongeant *AG* vers *M*; il eſt clair que le centre du cercle cherché ſera ſur *AM*, & que ce cercle doit toucher les deux lignes *AN*,*EN* en quelque point. C'eſt pourquoi diviſant l'angle *ANO* en deux parties égales par la ligne *NC*, le point *C* ſera le centre & *CA* le rayon.

RROBLEME XIV.

Ayant les trois tangentes GV, VP, PF *d'une portion quelconque* GEF *de la courbe, on demande le cercle générateur.* Fig. 15.

SOLUTION.

Ayant mené les perpendiculaires *GL*, *EN*, *FM*, ſur chaque tangen-

te, la question se réduit à trouver un cercle qui touche ces trois lignes ; ou en général à trouver un cercle qui touche les trois lignes données de position (*Fig.* 16.) *MVN*, *VDL*, *MLO*. Or on trouvera le centre *C* de ce cercle, en divisant en deux parties égales, les angles *V*, *L*, par les lignes *VC*, *LC*. Le centre *C* étant trouvé, la perpendiculaire *CD* sera le rayon.

THEOREME I.

Soient décrits deux cercles concentriques à discretion FAB, HI, (Fig. 17. 18. 19.) *soient tirées la tangente* FE *&* *la ligne* GI. *Soit pris l'arc* FA *à l'arc* AD ; *comme* $FI^2 - GF^2$. GF^2. *Soit regardé le point* D *comme l'origine de la dévelopante du cercle* FAB, *il arrivera de trois choses l'une, ou que cette dévelopante passera au-dessus du point* I, *comme dans la fig.* 18 ; *ou qu'elle passera au-dessous, comme dans la fig.* 19. *ou qu'elle*

passera par ce point, comme fig. 17.

Je dis que, si elle passe au-dessus du point I, *on aura la quadrature de la différence des espaces* C *&* I; *que si elle passe au-dessous, on aura la quadrature de la somme de ces espaces, & que, si elle passe par le point* I, *on aura la quadrature de l'espace* C.

DEMONSTRATION.

Premier cas, Fig. 18. où la dévelopante passe au-dessus du point *I*. Par une proposition démontrée dans les Mémoires de l'Académie ann. 1703. L'espace $A+B+C$ est quarrable. Par la nature de la dévelopante, l'espace $A+B+I$ est quarrable. Donc l'espace $A+B+C-A$, $-B$, $-I$, ou $C-I$ est quarrable.

Second cas, Fig. 19. Où la dévelopante passe au-dessous du point *I*, par la proposition que j'ai citée, $A+B+C+I$, est quarrable. Par la nature

de la dévelopante $A+B$ eſt quarrable. Donc $A+B+C+I, -A, -B$ eſt quarrable, où $C+I$ eſt quarrable.

Troiſiéme cas, Fig. 17. $A+B+C$ eſt quarrable par la propoſition citée. $A+B$ l'eſt par la nature de la dévelopante. Donc C eſt quarrable.

COROLLAIRE I.

C eſt quarrable dans le troiſiéme cas, Fig. 17. $B+D$ l'eſt auſſi. Mais $C+B+D$ eſt égal au ſecteur GHI. Donc ce ſecteur eſt quarrable.

COROLLAIRE II.

$C-I$ eſt quarrable dans le premier cas, Fig. 18. Mais $A+B+D+L+I$, eſt auſſi quarrable. Donc $A+B+D+L+I+C$, $-I$, ou $A+B+D+C+L$, eſt quarrable. Mais $A+B+C$ eſt quarrable. Donc $D+L$, l'eſt auſſi.

COROLLAIRE III.

$C+I$ eſt quarrable, ſecond cas Fig. 19. $A+B+D+L$ l'eſt auſſi. Donc $A+B+D+L+C+I$ eſt quarrable. Donc $A+B+C+I$ l'eſt. Donc $D+L$, eſt quarrable.

COROLLAIRE IV.

Donc dans les cas où la develo-pante, dont on ſuppoſe l'origine en *D* paſſe au-deſſus ou au-deſſous du point *I*, on a la quadrature du ſecteur circulaire $D+L$. Or dans le cas où elle paſſe par le point *I*, on a la quadrature du ſecteur *BDC*.

THEOREME II.

Si l'on trace un cercle AFG, *avec la dévelopante* AE, *& un autre cercle* Afg *dont le centre* c *ſoit ſur une ligne qui parte du centre* C, *& qui paſſe par le point* A, *avec ſa dévelopante* Ae. *Je dis que l'eſ-*

pace AE e *fait des deux dévelopantes &* *d'une partie de la ligne* CE e *prolongée, eſt quarrable.*

Demonstration.

L'eſpace ACE eſt quarrable. L'eſpace Ace eſt quarrable. Otant le premier du ſecond, le reſte $AEe + ACc$ ſera quarrable. Mais ACc eſt un eſpace rectiligne ; donc l'eſpace AEe, eſt quarrable. Ce que j'avois à démontrer.

Remarque.

Puiſque l'on peut conſidérer une courbe quelconque comme compoſée d'une infinité de très-petits arcs circulaires, il s'enſuit que tout ce que nous avons démontré du cercle & de ſa dévelopante, l'eſt auſſi de ces petits arcs & de leurs dévelopantes.

Soient donc l'arc infiniment petit abe d'une courbe quelconque ; ag ſa dévelopante ;

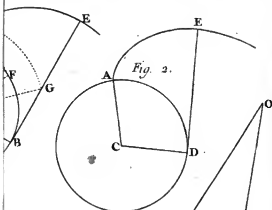
dévelopante ; *ca* ſon rayon oſculateur ; *eg* ſa tangente ; & *cg* une ligne tirée du centre *c* au point *g* où la dévelopante du petit arc eſt rencontrée par la tangente. Planche derniere de l'ouvrage, Fig. 1.

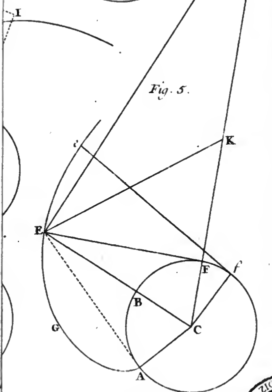
Il eſt conſtant par une des propoſitions que nous avons démontrée ci-deſſus que l'eſpace $abeg =$ l'eſpace $acbg$. Otant donc de part & d'autre l'eſpace commun abg, reſtera l'eſpace $abc =$ l'eſpace gbe. Donc $ac = \frac{gb \times be}{ab} = \frac{gb \times ae}{ab}$, car l'angle aeg étant infiniment petit, on peut ſubſtituer ae à be. Or gb eſt le ſinus de l'angle de contingence aeg, & ab ſon ſinus verſe.

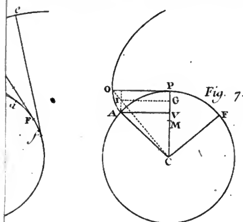
Donc le rayon de la dévelopée eſt toujours comme l'arc infiniment petit, multiplié par le rapport du ſinus de l'angle de contingence au ſinus verſe du même angle.

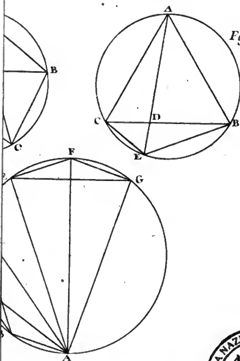
Fin du ſecond Mémoire.

L


E
F
G
B
Fig. 2.
A
E
C
D
O
I


Fig. 5.
e
K
E
F
f
B
C
G
A


O
P
I
G
A
V
M
F
C
Fig. 7.
e
d
F
f


A
Fig. 9.
C
D
B
E
B
C
F
G
A



E

Fig. 12

C

A B

D

G

C

D

H

E N Fig. 14. O

G A C M

P F

Fig. 15.

E

V

L M

G

N

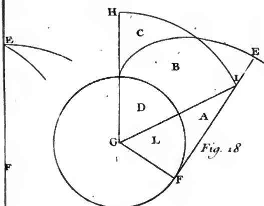
M

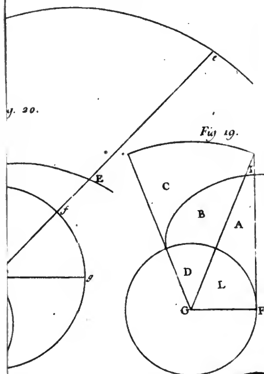
V D L Fig. 16.

N O

C




H
C
B
E
E
I
D
A
G
L
F
F
Fig. 18


e
g. 20.
Fig 19.
C
I
E
B
f
A
D
g
L
G
F





TROISIÉME MÉMOIRE.

Examen d'un principe de Mécanique sur la tenſion des Cordes.

SI une corde *AB* eſt attachée à un point fixe *B*, & tirée ſuivant ſa longueur par une force ou puiſſance quelconque *A*; il eſt certain que cette corde ſoufrira une tenſion plus ou moins grande ſelon que la puiſſance *A* qui la tire ſera plus ou moins grande. Fig. 10. Pl. dern.

Il en sera de même, si l'on substituë au point fixe *B* une puissance égale & contraire à la puissance *A*, il est constant que la corde sera d'autant plus tenduë que les puissances qui la tirent seront plus grandes.

Mais voici une question qui a jusqu'ici fort embarrassé les Mécaniciens. On demande si une corde *AB* attachée fixement en *B* & tenduë par une puissance quelconque *A*, est tenduë de la même maniere qu'elle le seroit, si au lieu du point fixe *B*, on substituoit une puissance égale & contraire à la puissance *A*.

Plusieurs Auteurs ont écrit sur cette question que Borelli a le premier proposée. Voici comment on peut la résoudre, en regardant la corde tenduë comme un ressort dilaté dont les extrémités *A*, *B* font également effort pour se rapprocher l'une de l'autre.

Je suppose d'abord que la corde soit

fixe en *B* & tenduë par une puiſſance appliquée en *A*, dont l'effort ſoit équivalent à un poids de 10 livres : il eſt certain que le point *A* ſera tiré ſuivant *AD* avec un effort de 10 livres, & comme ce point *A*, par hypotheſe, eſt en repos, il s'enſuit que, par la réſiſtance de la corde, il eſt tiré ſuivant *AB* avec une force de 10 livres & qu'il fait par conſéquent un effort de 10 liv. pour ſe rapprocher du point *B*.

Mais par la nature du reſſort, le point *B* fait le même effort de 10 liv. ſuivant *BA* pour ſe rapprocher du point *A*, & cet effort eſt ſoutenu & anéanti par la réſiſtance du point fixe *B*.

Qu'on ôte maintenant le point fixe *B* & qu'on y ſubſtituë une puiſſance égale & contraire à *A*. Je dis que la corde demeurera tenduë de même;car l'effort de 10 livres que fait le point *B* ſuivant *BA*, ſera ſoutenu par un effort

contraire de la puiſſance *B* ſuivant *BC*. La corde reſtera donc comme elle étoit auparavant.

Donc une corde *AB* fixe en *B*, eſt tenduë par une puiſſance *A* appliquée à l'autre extrémité, comme elle le ſeroit, ſi au lieu du point *B*, on ſubſtituoit une puiſſance égale & contraire à la puiſſance *A*.

Tel eſt le principe de mécanique que je me propoſe d'examiner. La démonſtration que je viens d'en apporter eſt tirée du Dictionnaire univerſel des Sciences & des Arts. Voyez, lorſque cet ouvrage paroîtra, les articles corde, ou tenſion.

Si l'on veut s'aſſurer par expérience de la vérité de ce principe; il faut attacher une corde de léton à un point fixe; ſuſpendre à ſon autre extrémité un poids quelconque; & faire gliſſer un chevalet ſous ſa longueur, juſqu'à ce qu'elle ſoit à l'uniſſon avec une des

touches d'un Clavecin. Cela fait, on laiſſera le chevalet où il eſt; & l'on ſubſtituera au point fixe, un poids égal au premier.

Il arrivera de deux choſes l'une; ou que la corde continuera d'être à l'uniſſon avec la touche du Clavecin, ou qu'elle rendra un ſon plus aigu. Si elle rend un ſon plus aigu, la tenſion eſt plus grande avec deux poids égaux & agiſſans en ſens contraires, qu'avec un ſeul poids & un point fixe.

Le rapport des deux ſons donnera même la différence des tenſions.

Un des avantages de cette expérience, c'eſt qu'elle fournit un moyen d'apprétier les tenſions des cordes ſelon les poids qu'elles ſoutiennent; ce que l'on auroit peut-être bien de la peine à obtenir par une autre voye.

J'envoyois dans un des Mémoires précédens, au Thermométre & au Barométre pour avoir un ſon fixe, &

j'envoye maintenant au Clavecin pour avoir la tension des cordes & la vérification d'un principe de mécanique.

Fin du troisiéme Mémoire.



D. Sornique Sculp.

QUATRIÉME MÉMOIRE.

Projet d'un nouvel Orgue ſur lequel on pourra exécuter toute piece de Muſique à deux, trois, quatre, &c. parties, inſtrument également à l'uſage de ceux qui ſçavent aſſez de Muſique pour compoſer, & de ceux qui n'en ſçavent point du tout.

ENTRE tous les inſtrumens de Muſique, il n'y en a peut-être aucun qui ſoit plus mépriſé que l'Orgue d'Allemagne, & c'eſt à juſte titre, car il raſſemble les

défauts principaux des autres. Il a peu d'étenduë, il eſt borné à un certain nombre d'airs & l'on ne peut l'employer à l'accompagnement. Mais en revanche il ne ſuppoſe aucun talent dans celui qui en jouë, & l'on ne diſconviendra pas qu'il n'y ait quelque mérite à l'avoir inventé; que le mécaniſme n'en ſoit aſſez délicat, & que, s'il n'exécute qu'un très-petit nombre de piéces, c'eſt avec tant de préciſion que les premiers Organiſtes de l'Europe, les Calvier & les Daquin en approchent à peine. Auſſi les perſonnes ſenſibles à l'harmonie ne peuvent-elles quelquefois ſe défendre de lui prêter l'oreille; la douceur des ſons, & l'exactitude de l'exécution ſuſpendant en elles, le dédain qu'elles ont de l'inſtrument.

Mais c'eſt peut-être moins encore les imperfections de cet Orgue, l'uſage qu'on en fait & le peu de mérite

qu'il y a à en jouer, qui l'ont avili, que les mains entre lesquelles il se trouve ordinairement. Le premier qui parut, fut admiré, il n'en faut point douter. Aujourd'hui que cet instrument est commun, les boëtes qui le renferment ne s'ouvrent guéres que pour satisfaire la curiosité des enfans émerveillés d'entendre sortir des sons d'un corps qui par sa ressemblance extérieure à un morceau cubique de bois, ne leur paroît point fait pour cela.

Pour moi qui ne suis guéres plus honteux & guéres moins curieux qu'un enfant, je n'eus ni cesse ni repos que je n'eusse examiné le premier Orgue d'Allemagne que j'entendis : & comme je ne suis point Musicien, que j'aime beaucoup la Musique, & que je voudrois bien la sçavoir & ne la point apprendre ; à l'inspection de cet instrument, il me vint en pensée

qu'il feroit bien commode pour moi & pour mes femblables qui ne font pas en petit nombre, qu'il y eût un pareil Orgue ou quelqu'autre inftrument qui n'exigeat ni plus d'aptitude naturelle, ni plus de connoiffances acquifes, & fur lequel on put exécuter toute piéce de Mufique.

En appuyant fur cette idée, je ne la trouvai point auffi creufe que l'imaginérent d'abord quelques perfonnes à qui je la communiquai. Il eft vrai qu'elles avoient leurs talens à défendre, & qu'au fond de l'ame elles auroient été fâchées qu'on découvrit un moyen de faire à peu de frais & dans un moment, ce qui leur avoit couté beaucoup de tems, d'étude & d'exercice. » Eh oui, me dirent-elles, Mon-» fieur le pareffeux. On vous en fera » des Orgues d'Allemagne qui joue-» ront tout fans que vous vous en mê-» liez. Ne faudroit-il pas encore vous

» dispenser de tourner la manivelle? «
Je répondis qu'assurement cela n'en seroit que mieux, mais que j'aimois tant la Musique que je me résoudrois à prendre cette peine, pourvû qu'on m'épargnât celle d'avoir pendant quinze ans les doigts sur un Clavecin, avant que d'exécuter passâblement une piéce. Si le célébre Vaucanson, ajoutai-je, qui a fait manger & vivre un Canard de bois, & jouer de la Flute à des statuës, se proposoit cette autre machine, je ne doute point qu'il n'en vint à bout, & qu'on ne nous annonçât incessamment un Organiste Automate! Et pourquoi non? Seroit-ce le premier qu'on auroit vû?

De réflexions en réflexions, moitié sérieuses, moitié folâtres, car je n'en fais guéres d'autres, je parvins à me demander pourquoi le carillon de la Samaritaine changeoit d'airs, & pourquoi l'Orgue d'Allemagne jouoit

toujours les mêmes. Je me répondis par rapport à celui-ci, que c'eſt parce que les petites pointes, que les artiſtes appellent notes, qui agiſſent ſur les touches, ſont immobiles ſur le cylindre ; & je conçus auſſi-tôt un autre cylindre criblé de trous artiſtement diſpoſés, dans leſquels des pointes mobiles pourroient, s'inſérer, frapper les touches des tuyaux qu'on voudroit faire parler, & produire enſemble & ſucceſſivement toutes ſortes de ſons à diſcretion.

Le mécaniſme de ce cylindre, quoique de la derniere ſimplicité, ne fut d'abord que très-embrouillé dans ma tête ; mais en attendant que mes premieres idées ſe netoyaſſent, je fus ſi aiſe de les avoir euës que j'en treſſaillis, & qu'il me ſembla que j'exécutois déja tout ſeul & ſans ſçavoir preſqu'un mot de Muſique, un Concert à quatre ou cinq parties. On va juger

si je présumai trop de ma découverte.

Mais pour bien entendre le reste de ce projet, il faudroit tâcher de vaincre sa honte, appeller la premiere Marmotte qu'on entendra jouer de l'Orgue d'Allemagne, se faire ouvrir la boëte & achever de lire, en donnant de tems en tems un coup d'œil sur la piéce de cette machine dont on voit ici le dévelopement.

Imaginez d'abord un cylindre creux de quelque matiere solide, & auquel on donnera une épaisseur que l'usage qu'on en veut faire déterminera.

Que ce cylindre creux ait pour noyau un morceau de bois rond, ou un autre cylindre de bois, couvert de plusieurs doubles d'une étoffe compacte, qui forment sur lui une espece de pelote.

Que cette pelote dure remplisse exactement toute la cavité du cylindre creux.

Que ce cylindre creux ſoit percé de trous diſpoſés de la maniere que je vais dire. Voy. à la fin de ce mém. la fig.

Les lignes verticales ſol, 1, 2, 3, &c. ſol ※, 1, 2, 3, &c. la, 1, 2, 3, &c. ſont des projections de pluſieurs circonférences du cylindre: c'eſt ſur ces circonférences qu'on placera des notes, ou pointes mobiles, ce qui ſuppoſe qu'elles ſeront percées de trous dans toute leur longueur.

Si ces petits trous n'étoient éloignés les uns des autres que d'une demie ligne, on pourroit placer ſeize pointes dans un eſpace de huit lignes, & chaque pointe exprimant par ſa diſtance à celle qui la ſuit, la valeur d'une double croche, on auroit pour l'intervalle d'une meſure à quatre tems, huit lignes; pour l'intervalle d'une meſure à trois tems, ſix lignes, &c.

D'où il s'enſuit 1°. Que ſi le cylindre tourne ſur lui-même d'une viteſſe uniforme

uniforme, de la quantité 1, 8, & qu'il y ait une note, ou pointe fichée dans le premier trou de la ligne verticale *ſol*, une autre dans le ſecond trou de la verticale *D*, une autre dans le troiſiéme trou de la verticale *la*, une autre dans le quatriéme trou de la verticale *D*, & ainſi de ſuite, juſqu'au ſeiziéme trou de la ſeiziéme verticale, on entendra ſucceſſivement dans un tems donné les ſeize ſons, *ſol*, *ſol D*, *la*, *la D*, *ſi*, *ut*, *ut D*, &c. dans les trois quarts de ce tems donné, les douze ſons *ſol*, *ſol D*, *la*, *la D*, *ſi*, *ut*, &c. Dans la moitié du même tems, les huit ſons *ſol*, *ſol D*, *la*, *la D*, &c. Donc tous ces ſons auront été parfaitement rendus en meſure.

2°. Que ſi la pointe que j'ai placée dans le premier trou de la verticale *ſol* avoit eu de la continuité; que ſi, par exemple, elle eût couvert les huit premiers trous de cette ligne, elle

eût repreſenté une blanche, & que ſi j'avois placé dans le neuviéme trou de la verticale *ut* une autre pointe qui eût couvert les huit autres trous de la meſure, laiſſant à vuide les trous des autres verticales *D*, *la*, *D*, *ſi*, *D*, *re*, *D*, &c. au lieu d'entendre, dans le tems donné, pendant lequel le cylindre a tourné ſur lui-même de la quantité 1, 8, *ſol*, *D*, *la*, *D*, *ſi*, *ut*, &c. doubles croches; on auroit ſeulement entendu *ſol* blanche ſuivi de *ut* blanche.

3°. Qu'ayant des pointes de différentes longueurs, depuis la triple ou double croche juſqu'à la ronde & pardelà pour les tenuës de pluſieurs meſures, des pointes pour la triple croche pointée, la double croche, la double croche pointée, la noire, la noire pointée, la blanche, la blanche pointée, la ronde ou la meſure, &c. Et jouiſſant en même tems de la com-

modité de les placer sous toute verticale *sol*, *D*, *la*, *D*, *si*, *ut*, &c. & dans quelqu'endroit de ces lignes qu'on desirera ; on pourra faire resonner à l'orgue tel son & de telle durée qu'on voudra ; & qu'en laissant des trous à vuide sur toutes les verticales en même tems, & autant de trous qu'il sera besoin ; on pratiquera tous les silences possibles, depuis le plus long jusqu'au plus court. Or ces deux points comprennent toute la mélodie.

Il faut observer seulement que si l'on veut que l'Orgue rende les triples croches ; quel que soit l'intervalle sur une verticale, ou quelle que soit la partie d'une circonférence du cylindre dont la verticale est une projection, que l'on prenne pour une mesure, il faudra percer cette partie, cet intervalle, ou cet arc de trente-deux trous.

4°. Que tandis qu'une pointe ou

note placée ſur telle verticale, & couvrant autant de trous qu'on le déſirera, fera entendre tel ſon & de telle durée qu'on voudra ; d'autres pointes ou notes placées ſur d'autres verticales pourront faire entendre la même quantité de ſons, & que chaque partie de cette quantité de ſons ſera plus ou moins longue, plus ou moins aiguë à diſcretion. Deux points qui comprennent toute l'harmonie.

Or la meſure, la mélodie & l'harmonie conſtituent tout ce que nous entendons par Muſique, & tout ce qui caractériſe & différencie les piéces.

Il n'y a donc point de piéces qu'on ne pût jouer ſur un inſtrument tel que celui que je viens de décrire.

5°. Que plus il y aura de verticales 1, 2, 3, &c. entre *ſol* & *D*, entre *la* & *D*, entre *ſi* & *ut*, &c. plus le cylindre pourra contenir de morceaux de Muſique différens à la fois.

6°. Que plus il y aura de verticales *ſol*, *D*, *la*, *D*, *ſi*, *ut*, &c. plus l'inſtrument aura d'étenduë, & on pourra lui en donner autant & plus qu'au Clavecin.

7°. Que plus les verticales *ſol*, 1, 2, 3, &c. *la*, 1, 2, 3, &c. ſeront longues ; plus elles contiendront de meſures ; plus les piéces qu'on jouera pourront être longues. On peut donner à ces lignes ou à celles qu'elles repreſentent, ou au diamétre du cylindre, aſſez de longueur pour qu'on y puiſſe noter toutes ſortes de piéces : je tiens de M. Richard, le plus habile conſtructeur d'Orgue d'Allemagne qu'il y ait à Paris, qu'on peut noter ſur la circonférence d'un cylindre de deux pieds de diamétre plus de 120 meſures à quatre tems d'une *Allemanda largo* ; or ces 120 meſures équivalent à plus de 160 d'un *Allegro*.

8°. Qu'à l'aide des lignes 1, 2, 3,

4, 5, &c. horiſontales qui paſſent ſur une rangée de trous & qui en contiennent entr'elles une autre rangée, on connoîtra toujours facilement les endroits des verticales où les notes ou pointes qui agiſſent ſur les touches, ſe placeront.

9°. Que ſi l'on donne au cylindre la facilité de ſe mouvoir de droite à gauche ou de gauche à droite, on pourra faire enſorte que les pointes placées ſur les verticales *ſol*, *D*, *la*, *D*, *ſi*, *ut*, &c. ne portent plus ſur ces touches, mais tombent dans l'intervalle que ces touches laiſſent entr'elles, & que ces touches ſoient frappées des pointes placées ſur d'autres verticales, d'où il s'enſuit qu'on aura ſur le cylindre pluſieurs piéces à la fois, & que le nombre en ſera d'autant plus grand que l'intervalle laiſſé entre les touches permettra de laiſſer entre les verticales *ſol*, *D*, *la* *D*, *ſi*,

ut, &c. plus d'autres verticales 1, 2, 3, &c.

10°. Qu'en notant la même piéce fur les verticales *fol*, *D*, *la*, *D*, *fi*, *ut*, *D*, *re*, *D*, *mi*, *fa*, *D*; on l'effayeroit dans tous les tons poffibles.

Il faut pratiquer à chaque petite pointe ou note un arrêt, afin qu'en agiffant fur les touches, elles ne s'enfoncent pas plus qu'il ne faut.

Il n'y a pas à craindre qu'elles fe détachent, fi l'étoffe dont on aura couvert le cylindre intérieur & dans laquelle elles font fichées par leur extrémité faite en épingle, eft fuffifamment compacte, & fi l'on obferve quand on rechange d'airs, de faire un peu tourner la pelote, afin que les trous faits dans l'étoffe par les épingles, pointes, ou notes qu'on vient de retirer, ne correfpondent plus aux trous du cylindre de cuivre.

Elles fe détacheront d'autant moins

que l'action des touches fur elles eft très-foible & que d'ailleurs elle eft oblique à leur enfoncement.

Il faut obferver en perçant les trous, de ne laiffer entr'eux que l'intervalle qui convient au mouvement le plus prompt ; parce que 1°. On placera fur une même circonférence un plus grand nombre de mefures. 2°. Qu'il vaut mieux avoir à rallentir le mouvement de la manivelle qu'à l'augmenter. On va toujours auffi lentement, mais non pas auffi vite qu'on veut.

Avantages de l'inftrument propofé.

1°. Un enfant de l'âge de cinq ans pourroit fçavoir noter fur le cylindre le morceau le plus difficile & l'exécuter. Cela lui couteroit moins que d'apprendre à lire par le Bureau Typographique : car les caracteres & leurs combinaifons font ici beaucoup moins nombreux que les lettres. Il y a

vingt-quatre lettres, & il ne me faut que onze caracteres.

2°. Tout Muſicien au lieu de compoſer ſur le papier pourroit compoſer ſur le cylindre même, éprouver à chaque inſtant ſes accords & répéter ſans aucun ſecours toute ſa piece.

3°. Cet exercice faciliteroit extrêment aux enfans l'étude de la Muſique, ſoit vocale, ſoit inſtrumentale; car lors qu'ils ſe trouveroient vis-à-vis d'un Maître, ils auroient déja fait pendant long-tems la comparaiſon des notes ſur le papier & de leur effet ſur le cylindre.

4°. Ils ſeroient plus avancés du côté de la compoſition, & ils auroient l'oreille plus faite à huit ans, qu'ils ne l'ont aujourd'hui communément à vingt, après avoir paſſé par les mains des plus habiles Maîtres.

5°. On auroit certainement plus de plaiſir à entendre cet inſtrument qu'un

Organiste médiocre, comme la plûpart le sont, qui ne fait que balbutier sur son Orgue, ne marche jamais en mesure, pratique à chaque instant des accords déplacés, se répéte sans fin, & ne répéte jamais que de mauvaises choses, &c.

6°. On ne seroit plus exposé aux boutades d'un Musicien, habile à la vérité dans son art, mais souvent plus habile que dévot, à qui il prendra envie de jouer à la consécration, l'*Allegro* le plus badin ou la *Gigue* la plus folâtre, & d'inspirer à tout un Peuple de fidéles la démangeaison de danser devant l'Arche au moment où c'est la coutume de s'incliner.

7°. Beaucoup de personnes qui n'ont point de voix, qui manquent d'aptitude pour un instrument, qui n'ont point appris la Musique, qui l'aiment, & qui n'ont ni les moyens, ni le tems, ni la commodité de l'appren-

dre, pourroient toutesfois s'amuser à jouer toutes les piéces dont ils s'aviseroient.

8°. Cet exercice contribueroit nécessairement aux progrès de la Musique.

9°. On n'employeroit à noter & à exécuter sur le nouvel Orgue guéres plus de tems, qu'il n'en faut pour noter sur le papier telle piéce dont l'exécution sur le Clavecin, demanderoit des habiles, plus de tems qu'on n'en mettroit à en ranger & jouer sur le nouvel Orgue une douzaine d'autres.

10°. La difficulté de l'exécution n'empêcheroit plus de pratiquer certains tons peu usités avec lesquels cet Orgue familiariseroit, comme le *sol D*, le *la D*, &c. on pourroit composer dans tous ces tons; ce qui fourniroit peut-être, sinon des chants, du moins des traits d'harmonie & des expressions qui nous sont inconnuës.

11°. D'un moment à l'autre, on pourroit hausser ou baisser une piéce d'un ton, d'un demi-ton, ou de tout autre intervalle.

12°. Les expériences sur les sons se multipliant facilement de jour en jour, & cela par des gens exercés à penser, on pourroit à la longue en amasser un assez grand nombre, pour fonder une bonne théorie & donner des regles sûres de pratique, ce qui n'arrivera pas tant que les phénomenes demeureront ensevelis dans les oreilles des Artistes.

13°. Un bon Orgue de cette espece rameneroit peut-être à l'Eglise de leur Paroisse, un grand nombre d'honnêtes gens qui ont de l'oreille, & qui en ont été chassés par un mauvais Organiste.

14°. Peut-être que la facilité qu'on auroit à exécuter les piéces les plus difficiles, empêcheroit que dans la

suite on ne continuât à les prendre pour les plus belles.

Je vais maintenant passer aux inconveniens de cet instrument, car il en a.

Inconveniens de l'Orgue proposé.

1°. C'est un ignorant en Musique qui le propose.

2°. Il ne seroit plus permis aux Organistes d'être médiocres.

3°. On n'auroit plus besoin de ces Maîtres d'accompagnement & de composition, qui ne nous prescrivent que des regles vagues dont un long usage peut seul déterminer l'emploi.

4°. Les Maîtres à chanter garderoient la moitié moins de tems leurs écoliers.

5°. Ils seroient contraints d'être la moitié plus habiles, ayant à montrer à des Ecoliers dont l'oreille seroit déja faite, qui mépriseroient la regle de

transſpoſition & qui demanderoient à chanter leur leçon comme ils la joueroient ſur leur Orgue.

6°. On joueroit en quatre heures ; & cela avec la derniere préciſion, toutes les pieces de M. Rameau, qu'on n'apprend en pluſieurs années que très-imparfaitement.

7°. Beaucoup de gens qui ſont bien aiſe de s'amuſer avec un inſtrument, abandonneroient le Clavecin, la Baſſe-de-Viole, le Violon, &c. & négligeroient l'honneur d'apprendre mal en cinq ou ſix années de tems, ce qu'ils pourroient exécuter parfaitement en dix jours.

8°. Nous deviendrions extrémement difficiles ſur l'exécution de la Muſique inſtrumentale, d'où il arriveroit que la plûpart de ceux qui s'en mêlent en ſeroient reduits à ſe perfectionner ou à brûler leurs iuſtrumens.

9°. Comme une piéce ne me plaît

pas davantage à moi qui l'entens, ſoit qu'on ait employé beaucoup de tems à l'apprendre, ſoit qu'on l'ait auſſi-bien appriſe en un moment, l'oreille ne faiſant point cette diſtinction, nous parviendrions peut-être à nous défaire d'un préjugé favorable à pluſieurs choſes fort eſtimées qui n'ont que le mérite de la difficulté.

Je ſens toute l'importance de ces inconveniens. J'en ſuis frappé, & je prévois que beaucoup de gens ne manqueront pas d'en imaginer une infinité d'autres de la même force & de me traiter moi & mon Orgue d'impertinens. Mais le déſir de ſervir en quelque choſe au progrès des beaux arts, autant que je le pourrai ſans nuire aux intérêts des Artiſtes auſquels je n'ai garde de le préférer, ſuffira pour me conſoler des épithetes injurieuſes que j'encourerai.

Obſervations ſur le Chronométre.

On entend par un Chronométre, un inſtrument propre à meſurer le tems. On prétend qu'il ſeroit fort à ſouhaiter qu'on eût un bon inſtrument de cette eſpece, afin de conſerver par ce moyen le vrai mouvement d'un air, car les mots *allegro*, *vivace*, *preſto*, *affettuoſo*, *ſoavemente*, *piano*, &c. dont ſe ſervent les Muſiciens ſeront toujours vagues, tant qu'on ne les rapportera point à un terme fixe de viteſſe ou de lenteur, dont on ſera convenu. Auſſi voit-on aujourd'hui des perſonnes ſe plaindre que le mouvement de pluſieurs airs de Lully eſt perdu. Si l'on eût eu l'attention, diſent-ils, de ſe ſervir d'un pendule pour déterminer le tems de la meſure dans un air, & d'écrire à la tête des piéces de Muſique, au lieu des *preſto*, *preſtiſſimo*, *andante*, &c. qu'on y lit, 1, 2, ou

ou 3 fecondes par mefure, ou 5 fecondes pour 1, 2, 3 ou 4 mefures; ou *m* de fecondes pour *n* de mefures; on auroit évité cet inconvenient, & l'on auroit dans mille ans le plaifir d'entendre les airs admirables de M. Rameau, tels que l'Auteur les fait exécuter aujourd'hui.

Ceux qui s'en tiennent à l'écorce des chofes trouveront peut-être ces obfervations folides; mais il n'en fera pas de même des connoiffeurs en Mufique.

Ils objecteront contre tout Chronométre en général, qu'il n'y a peut-être pas dans un air quatre mefures qui foient exactement de la même durée; deux chofes contribuant néceffairement à rallentir les unes & à précipiter les autres, le goût & l'harmonie dans les pieces à plufieurs parties; le goût & le preffentiment de l'harmonie dans les *folo*. Un Muficien qui

fçait ſon art, n'a pas joué quatre meſures d'un air qu'il en ſaiſit le caractere & qu'il s'y abandonne : il n'y a que le plaiſir de l'harmonie qui le ſuſpende; il veut ici que les accords ſoient frappés, là qu'ils ſoient dérobés; c'eſt-à-dire, qu'il chante ou jouë plus ou moins lentement d'une meſure à un autre & même d'un tems & d'un quart de tems à celui qui le ſuit.

Le ſeul bon Chronométre que l'on puiſſe avoir, c'eſt un habile Muſicien qui ait du goût, qui ait bien lû la Muſique qu'il doit faire exécuter, & qui ſache en battre la meſure.

Si l'on ne jouë pas aujourd'hui certains airs de Lully dans le mouvement qu'il prétendoit qu'on leur donnât, peut-être n'y perdent-ils rien. Un Auteur n'eſt pas toujours celui qui déclame le mieux ſon ouvrage.

Mais ſi l'on ne trouve pas ces obſervations aſſez ſolides & qu'on perſiſte

à désirer un instrument qui mette des bornes au caprice des Musiciens, je commencerai par rejetter tous ceux qu'on a proposés jusqu'à présent, parce qu'on y a fait du Musicien & du Chronométre deux machines distinctes, dont l'une ne peut jamais bien assujettir l'autre. Cela n'a presque pas besoin d'être démontré : il n'est pas possible que le Musicien ait pendant toute sa piéce l'œil au mouvement ou l'oreille au bruit du pendule, & s'il s'oublie un moment, adieu le frein qu'on a prétendu lui donner.

Mais comment, me demandera-t-on, faire du Musicien & du Chronométre une seule & même machine. Il paroît que cela est impossible.

Je répons qu'il y a tout au plus quelque difficulté. Mais voici comment j'estime qu'on viendroit à bout de la surmonter : il faudroit d'abord que les Musiciens renonçassent aux signes

dont ils se sont servis jusqu'à present ; & qu'ils substituassent aux *piano*, *presto*, *vivace*, *allegro*, &c. qu'on trouve à la tête de leurs piéces, les tems employés à les jouer en entier ; & qu'au-lieu d'écrire *giga*, *allegro* ; ils écrivissent *gigua*, 12, 13, 14, &c. secondes.

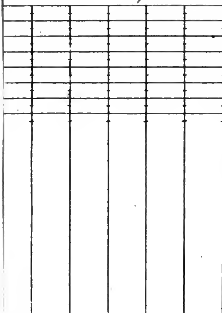
On noteroit ensuite cette gigue sur le cylindre de l'Orgue que je propose, & l'on appliqueroit le pendule à secondes au cylindre, de maniere que l'aiguille parcoureroit 12, 13 ou 14, &c. secondes ; tandis que le cylindre tourneroit sur lui-même par le mécanisme même du pendule qui lui seroit appliqué, de l'arc sur lequel la gigue entiere seroit notée.

Je n'entrerai point dans la maniere dont cette application du pendule au cylindre peut se faire ; c'est un bon Horloger qu'il faut consulter là-dessus. Voici seulement l'énoncé du pro-

blême qu'il faut lui propoſer à réſoudre.

Trouver le moyen de faire tourner un cylindre ſur lui-même d'une quantité donnée dans un tems donné.

Fin du quatrième Mémoire.


mi
fa
D
sol
D
la



CINQUIÉME MÉMOIRE,

OU

LETTRE

SUR LA RÉSISTANCE DE L'AIR

Au mouvement des Pendules.



N.Blakey inv. Ingram Sculp.

CINQUIÉME MÉMOIRE.

 * * *

Si l'endroit où Newton calcule la résistance que l'air fait au mouvement d'un Pendule, vous embarrasse ; que votre amour propre n'en soit point affligé. Il y a, vous diront les plus

grands Géométres, dans la profondeur & la laconicité des *principes mathématiques* de quoi consoler par tout un homme pénétrant qui auroit quelque peine à entendre ; & vous verrez bientôt que vous avez ici pour vous une autre raison qui me paroît encore meilleure ; c'est que l'hypothese d'où cet Auteur est parti n'est peut-être pas exacte. Mais une chose me surprend, c'est que vous vous soyez avisé de vous adresser à moi, pour vous tirer d'embarras. Il est vrai que j'ai étudié Newton dans le dessein de l'éclaircir ; je vous avouerai même que ce travail avoit été poussé, sinon avec beaucoup de succès, du moins avec assez de vivacité ; mais je n'y pensois plus dès le tems que les RR. Peres le Sueur & Jacquier donnerent leur Commentaire, & je n'ai point été tenté de reprendre. Il y auroit eu dans mon ouvrage fort peu de choses qui ne soient dans

celui de ces Savans Géométres, & il y en a tant dans la leur qu'assurément on n'eût pas rencontrées dans le mien. Qu'exigez-vous donc de moi? quand les sujets mathématiques m'auroient été jadis très-familiers ; m'interroger aujourd'hui sur Newton, c'est me parler d'un rêve de l'an passé. Cependant pour persévérer dans l'habitude de vous satisfaire, je vais, à tout hazard, feuilleter mes paperasses abandonnées, consulter les lumieres de mes amis, vous communiquer ce que j'en pourrai tirer & vous dire avec Horace, *si quid novisti rectius istis, candidus imperti ; si non, his utere mecum.*

PROPOSITION I.

PROBLEME.

Soit (Fig. 2.) *un Pendule* M *qui décrit dans l'air l'arc* B A, *étant attaché à la verge* G M *fixe en* G. *On demande la*

vitesse de ce pendule en un point quelconque M , *en supposant qu'il commence à tomber du point* B.

Soient $GM = a$. $NA = b$. $AP = x$. la pesanteur $= p$. la résistance que l'air feroit au corpuscule M, s'il étoit mû avec une vitesse g, $= f$. La vitesse du Pendule au point $M = v$.

Solution.

Si on suppose, avec tous les Physiciens, que la résistance de l'air & des autres fluides est comme le quarré de la vitesse; on aura la résistance au point $M = \frac{fvv}{gg}$; & cette résistance agissant suivant mM, tend à diminuer la vitesse v. De plus la pesanteur p tirant suivant MQ, on voit facilement qu'elle se décompose en deux autres forces, dont l'une qui agit suivant MR, est arrêtée & anéantie par la résistance du fil ou de la verge GM,

& dont l'autre a son effet suivant Mm perpendiculairement à GM & est égale à $\frac{p \times MP}{GM} = \frac{p\sqrt{2ax - xx}}{a}$. Donc la force accélératrice totale qui agit au point M pour mouvoir le corps suivant $Mm = \frac{p\sqrt{2ax - xx}}{a} - \frac{fvv}{gg}$.

Mais le tems employé à parcourir Mm, $= \frac{Mm}{v}$, & l'élément ou l'accroissement de la vitesse est égal à la force accélératrice multipliée par le tems. Donc $\left(\frac{p\sqrt{2ax - xx}}{a} - \frac{fvv}{gg}\right) \times \frac{Mm}{v} = dv$. Dans cette équation, je mets au lieu du petit arc Mm, sa valeur $-\frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$; avec le signe $-$; parce que v croissant à mesure que le pendule descend, x diminuë au contraire. J'ai $-pdx + \frac{fvv \times adx}{gg\sqrt{2ax - xx}} = vdv$; dont l'intégrale est $\frac{vv}{2} =$

$$pb - px + \int \frac{fvv \times adx}{gg\sqrt{2ax - xx}}.$$

J'ai ajouté la constante pb ; afin que v fut $= 0$, lorsque $x = b$, c'est-à-dire, lorsque le pendule est au point B, d'où on suppose qu'il commence à descendre par sa seule pesanteur.

On remarquera d'abord dans cette équation que, si $f = 0$; c'est-à-dire, si le Pendule se mouvoit dans le vuide ou dans un milieu non résistant, on auroit $vv = 2pb - 2px$; mais comme la résistance de l'air est fort petite par rapport à la pesanteur p, la valeur réelle de vu différera très-peu de $2pb - 2px$ & l'on pourra substituer $f(2pb - 2px)$ à fvv, ce qui ne produira qu'une très-petite erreur.

Ainsi on aura $vv = 2pb - 2px + 2\int \frac{f(2pb - 2px) \times adx}{gg\sqrt{2ax - xx}}$, pour la valeur approchée de vv.

Il s'agit à present de trouver l'inté-

grale du terme qui eſt ſous le ſigne $\int$, & la difficulté eſt reduite à intégrer $\frac{badx - axdx}{\sqrt{2ax - xx}}$.

On remarquera que cette intégrale doit être priſe de telle maniére qu'elle ſoit $= 0$, quand $x = b$. Or l'intégrale du premier terme $\int \frac{badx}{\sqrt{2ax - xx}}$ eſt $b \times$ (arc AM — arc AB). Dans laquelle j'ai ajouté la conſtante $- b \times$ arc AB; afin que $\int \frac{badx}{\sqrt{2ax - xx}}$ fut $= 0$, lorſque x ſeroit $= b$: on aura donc $\int \frac{badx}{\sqrt{2ax - xx}} = - b \times$ arc BM.

Maintenant pour avoir l'intégrale de $\int \frac{-axdx}{\sqrt{2ax - xx}}$, je l'écris ainſi $\int \frac{-axdx}{\sqrt{2ax - xx}} = \int \frac{aadx - axdx}{\sqrt{2ax - xx}}$ — $\int \frac{aadx}{\sqrt{2ax - xx}}$, dont l'intégrale eſt $a\sqrt{2ax - xx} - a \times AM = a \times (MP - AM)$, à laquelle il faut ajouter la

conſtante $-a(BN-AB)$; pour la raiſon que nous avons dite ci-deſſus; on aura donc $\int \frac{-axdx}{\sqrt{2ax-xx}} = -a \times (BO-BM)$.

Donc $vv = 2pb - 2px - \frac{2f \times 2pb \times BM}{gg} - 2f \times 2pa \times (BO-BM)$.

COROLLAIRE I.

Donc lorſque le Pendule eſt arrivé en A, on a $vv = 2pb - \frac{2f \times 2pb \times BA}{gg} - \frac{2f \times 2pa \times (BN-BA)}{gg}$.

COROLLAIRE II.

Donc, (*Fig.* 3.) ſi l'on fait $An = b - \frac{2fb \times BA}{gg} - \frac{2fa \times (BN-BA)}{gg}$, on aura $vv = 2p \times An$. C'eſt-à-dire, que la viteſſe au point A ſeroit la même que celle que le Pendule auroit acquiſe en tombant dans le vuide du point b juſqu'en A.

COROL.

COROLLAIRE III.

Si l'arc AB ne contient que peu de dégrés, BN sera presqu'égale à BA, & l'on pourra supposer $vv = 2pb - \frac{2f.2pb.BA}{gg}$.

PROPOSITION II.

PROBLEME.

Supposons, (Fig. 4.) *qu'un Pendule* A *placé dans la situation verticale* GA, *reçoive une impulsion ou vitesse* h *suivant l'horisontale* AR. *On demande sa vitesse en un point quelconque* M.

SOLUTION.

Les mêmes noms étant supposés que ci-dessus, la force rétardatrice sera ici $\frac{p\sqrt{2ax - xx}}{a} + \frac{fvv}{gg}$; parce que là résistance s'ajoute à la pesanteur

pour diminuer continuellement la vitesse du Pendule, & on aura $-du = \frac{adx}{v\sqrt{2ax-xx}} \times \left(\frac{p\sqrt{2ax-xx}}{a} + \frac{fvv}{gg}\right)$.

Je mets $-du$, parce que x croissant, v diminuë : donc $-vdv = pdx + \frac{fvv \times adx}{gg\sqrt{2ax-xx}}$, & ajoutant les constantes, $\frac{hh-vv}{2} = px + \int \frac{fvv \times adx}{gg\sqrt{2ax-xx}}$. Donc si $f=o$; on aura $vv = hh - 2px$; or l'on pourra, comme dans le Problême précédent, mettre au lieu de vv sa valeur approchée $hh - 2px$, dans le terme $\int \frac{fvvadx}{gg\sqrt{2ax-xx}}$. Ce qui donnera $vv = hh - 2px - 2\int \frac{fhhadx}{gg\sqrt{2ax-xx}} + 2\int \frac{f \times 2paxdx}{gg\sqrt{2ax-xx}} = hh - 2px - \frac{2fhh}{gg} \times AM + \frac{2f \times 2pa}{gg} \times (+AM - MP)$.

Soit AN la hauteur à laquelle le

Pendule auroit remonté dans le vuide; on aura $hh = 2p \times AN$, & $vv = 2p \times PN - \frac{2f \times 2p \times AN \times AM}{gg} + \frac{2f \times 2pa}{gg} \times (-MP + AM)$.

COROLLAIRE I.

Donc (*Fig.* 5.) lorſque le corps eſt arrivé au point c, tel que $Nn = \frac{2f \times AN \times Ac}{gg} + \frac{2f \times a \times (nc - Ac)}{gg}$; la viteſſe v ſera $= 0$.

COROLLAIRE II.

Comme nc & Ac différent très-peu de NC & de AC; il s'enſuit que pour trouver le point c ou le corps s'arrête; ou la hauteur n à laquelle il remonte; il faut prendre $Nn = \frac{2f \times AN \times AC}{gg} + \frac{2fa \times (NC - AC)}{gg}$.

COROLLAIRE III.

Si l'arc AC ne contient que peu de dégrés, AC sera presqu'égale à AN, & l'on aura à peu près $Nn = \frac{2f \times AN \times AC}{gg}$.

COROLLAIRE IV.

Si un Pendule (*Fig. 6.*) descend du point B, sa vitesse en A que je nomme h sera égale, Corol. 2. Prop. 1. à celle qu'il auroit acquise en tombant dans le vuide de la hauteur $An = b - \frac{2fb \times BA}{gg} - \frac{2fa \times (BN - BA)}{gg}$ & il remontera jusqu'à la hauteur Ar (Corollaire 2. Propos. 2.) $= An - \frac{2f \times An \times Ac}{gg} + \frac{2fa \times (nc - Ac)}{gg}$. Et comme nc & Ac diffèrent peu de BN & de BA, on aura $Ar = b - \frac{4fb \times BA}{gg} + \frac{4fa \times (BN - BA)}{gg}$.

COROLLAIRE V.

Donc si l'arc BA contient peu de dégrés, on aura $Ar = b - \frac{4fb \times BA}{gg}$ $= AN \times \frac{(1 - 4f \times BA)}{gg}$. Or dans cette même supposition, les arcs AC, Ak sont entr'eux, à très-peu près, comme les racines des abscisses AN, Ar. Car dans le cercle, les cordes sont entr'elles comme les racines des abscisses; or les arcs peuvent être pris ici pour les cordes. Donc $Ck = \frac{AC \times (\sqrt{AN} - \sqrt{Ar})}{\sqrt{AN}}$. Or $\sqrt{An} = \sqrt{AN \frac{(1 - 4f \times BA)}{gg}} = \sqrt{AN} \times \sqrt{1 - \frac{4f \times BA}{gg}}$ & comme $\frac{4f. BA}{gg}$ est fort petite par rapport à 1, on peut au lieu de $\sqrt{1 - \frac{4f \times BA}{gg}}$, mettre $1 - \frac{2f \times BA}{gg}$ qui lui est à peu près égale. Car on sçait que $\sqrt{1 - \alpha}$, α étant une très-

petite fraction, est $1 - \frac{\alpha}{2}$ à très-peu près. Donc $Ck = AC \times \frac{2fBA}{gg} = \frac{2fAB^2}{gg}$. Donc la différence Ck entre l'arc descendu AB & l'arc remonté Ak est comme le quarré de l'arc AB.

COROLLAIRE VI.

Donc (*Fig.* 7.) si on a l'arc BAC qu'un Pendule décrit dans l'air en tombant du point B, on aura facilement l'arc bAk qu'il doit décrire en tombant du point b. Car il ne faut que trouver Ak qu'on aura en faisant $BA - AC . bA - Ak :: BA^2 . bA^2$.

COROLLAIRE VII.

Donc (*Fig.* 6.) si un Pendule décrit l'arc BA dans l'air, on aura sa vitesse au point A, en divisant la ligne Nv en deux parties égales au point n. Car cette vitesse, Corol. 3. Prop. 1.

eſt à très-peu près égale à celle qu'il auroit acquiſe en tombant dans le vuide de la hauteur $b - \frac{2f \times BA}{gg} = b - \frac{Nv}{2}$.

COROLLAIRE VIII.

On a $AC^2 . Ac^2 :: AN . An$. C'eſt-à-dire, $AC^2 . AC^2 - 2Cc \times AC :: AN . AN - Nn$. Donc $Nn = \frac{2Cc \times AC \times AN}{AC^2} = \frac{2Cc \times AN}{AC}$.

Par le même raiſonnement on aura $Nv = \frac{2Ck \times AN}{AC}$. Donc $Ck . Cc :: Nv . Nn$. Donc c eſt le point de milieu de l'arc Ck. Donc au lieu de diviſer Nv en deux parties égales, on pourra diviſer Ck en deux parties égales pour avoir l'arc Ac que le corps A en remontant auroit parcouru dans le vuide.

COROLLAIRE IX.

Si le pendule A eſt un petit globe; la réſiſtance f, toutes choſes d'ailleurs

égales, eſt en raiſon inverſe du diamétre de ce globe & de ſa denſité ; car la réſiſtance de l'air à deux globes de différens diamétres eſt comme la ſurface ou le quarré des diamétres, & cette réſiſtance doit être diviſée par la maſſe, laquelle eſt comme la denſité multipliée par le cube du diamétre. Donc l'arc Ck, toutes choſes d'ailleurs égales, eſt comme AB^2 diviſé par le produit du diamétre du globe & de ſa denſité.

C'eſt à vous, M * * *, à voir maintenant l'uſage qu'on peut faire de ces propoſitions, lorſqu'on veut avoir égard à l'altération du mouvement que cauſe la réſiſtance de l'air, dans les expériences par leſquelles on cherche avec des pendules, les loix du choc des corps. Vous appercevrez ſans peine que les corollaires 6, 7, 8, donneront les viteſſes que les deux pendules ont ou reçoivent au point

le plus bas où ils font fuppofés fe choquer.

M. Neuton qui, comme vous fçavez, n'a pas cru devoir négliger cette réfiftance, lorfqu'il a parlé des loix du choc des corps, dans le premier Livre de fes Principes, paroît avoir fait Ck proportionelle, non au quarré de l'arc parcouru, comme nous l'avons trouvé, & comme peut-être vous le fuppofiez, lorfque cet endroit de fon ouvrage vous a arrêté; mais à l'arc feulement : c'eft ce qu'il me refte à vous démontrer. Pour cet effet je tranfcrirai fon texte, & j'y ajouterai les éclairciffemens que je trouve dans les papiers que les R. Peres Jacquier & le Sueur ont condamnés à l'oubli, en prévenant par leur excellent Commentaire, celui que je méditois.



Texte de Neuton.

» Soient, dit Neuton, Princip. » Mathém. pag. 50. voy. la fig. 8. * les

* *Pendeant corpora sphærica* A, B, *filis parallelis & æqualibus* A C, B D, *à centris* C, D. *His centris & intervallis describantur semicirculi* E A F, G B H, *radiis* C A, D B *bisecti. Trahatur corpus* A *ad arcûs* E A F *punctum quodvis R, & subducto corpore B, demittatur inde, redeatque post unam oscillationem, ad punctum* V. *Est* R V *retardatio & resistentia aeris. Hujus* R V *fiat* S T *pars quarta sita in medio, ita scilicet ut* R S, & T V *æquentur, sitque* R S, *ad* S T *ut* 3 *ad* 2. *& ista* S T *exhibebit retardationem in descensu ab* S *ad* A *quàm proximè. Restituatur corpus* B *in locum suum. Cadat corpus* A *de puncto* S, *& velocitas ejus in loco reflexionis* A *sine errore sensibili tanta erit, ac si in vacuo cecidisset de loco* T. *Exponatur igitur hæc velocitas per chordam arcûs* T A *; nam velocitatem penduli in puncto infimo esse ut chordam arcûs, quem cadendo descripsit, propositio est Geometris notissima. Post reflexionem perveniat corpus* A *ad locum* s, & *corpus* B *ad locum* K. *Tollatur corpus* B *& inveniatur locus* u *; à quo si corpus* A *demittatur, & post unam oscillationem redeat ad locum* r, *sit* s t *pars quarta ipsius* r v *sita in medio, ita videlicet ut* r s *&* t u *æquentur; & per chordam arcûs* t A *exponatur velocitas, quam corpus* A *proximè post reflexionem ha-*

» corps sphériques *A*, *B* suspendus des » points *C*, *D*, par fils paralleles & » égaux *AC*, *BD*. De ces points & » de la longueur des fils soient dé-

buit in loco A. *Nam* t *erit locus ille verus & correctus, ad quem corpus* A, *sublatâ aeris resistentiâ, ascendere debuisset. Simili methodo corrigendus erit locus* K, *ad quem corpus* B *ascendit, & inveniendus locus* l, *ad quem corpus illud ascendere debuisset in vacuo. Hoc pacto experiri licet omnia, perinde ac si in vacuo constituti essemus. Tandem ducendum erit corpus* A, *ut ita dicam, in chordam arcûs* TA, *quæ velocitatem ejus exhibet, ut habeatur motus ejus in loco* A *proximè ante reflexionem; deinde in chordam arcûs* t A, *ut habeatur motus ejus in loco* A *proxime post reflexionem. Et simili methodo, ubi corpora duo simul demittuntur de locis diversis, inveniendi sunt motus utriusque tam ante quam post reflexionem; & tum demùm conferendi sunt motus inter se, & colligendi effectus reflexionis. Hoc modo in pendulis pedum decem rem tentando, idque in corporibus tam inæqualibus quam æqualibus, & faciendo ut corpora de intervallis amplissimis, puta pedum octo, vel duodecim, vel sexdecim, concurrerent; reperi semper, sine errore trium digitorum in mensuris, ubi corpora sibi mutuò occurrebant, æquales esse mutationes motuum corporibus in partes contrarias illatæ, atque ideo actionem & reactionem semper esse æquales, &c.*

» crites les demi-circonférences *EAF*,
» *GBH*, divifées en deux parties éga-
» les par les rayons *CA*, *CB*. Faites
» remonter le corps *A* à quelque point
» *R* de l'arc *EAF*. Otez le corps *B*,
» & laiffez retomber le corps *A* : s'il
» remonte après une ofcillation au
» point *V*, *RV* exprimera la rétarda-
« tion caufée par la réfiftance de l'air.
» Prenez *ST* égale à la quatriéme par-
» tie de *RV*, placez-la dans le milieu;
» de forte que *RS* foit égale à *TV*, &
» que *RS* foit à *ST* comme 3 à 2,
» *RS* exprimera à peu près la rétarda-
» tion après la defcente de *S* en *A*.
» Remettez à fa place le corps que
» vous aurez ôté. Laiffez tomber le
» corps *A* du point *S*. Sa viteffe au
» point de réflexion *A* fera fans erreur
» fenfible, la même que s'il étoit def-
» cendu dans le vuide, du point *T*.
» Soit donc cette viteffe exprimée par
» la corde *TA*; car tous les Géomé-

» tres sçavent que la vitesse d'un pendule au point le plus bas de l'arc qu'il » décrit, est comme la corde de cet » arc. Si le corps *A* remonte après le » choc, au point *S*, & le corps *B* au » point *K*; ôtez le corps *B* & trouvez » le point *u* d'où laissant tomber le » corps *A*, il remonte après une oscillation au point *r*, tel que *st* soit la » quatriéme partie de *ru*, & *sr* égale » à *tu*. La corde *tA* exprimera la vitesse que le corps *A* avoit en *A*, » après sa réflexion; car *t* est le lieu » vrai & corrigé, auquel le corps *A* » feroit remonté sans la résistance de » l'air. il faudra corriger de la même » façon le lieu *K*, auquel le corps *B* » est remonté, & trouver le point *l* » qu'il eût atteint dans le vuide. C'est » ainsi qu'on fera les expériences, » comme dans le vuide. Enfin il faudra, pour ainsi dire, multiplier le » corps *A* par la corde *TA*, qui ex-

» prime sa viteſſe, pour avoir ſon mou-
» vement au point *A*, immédiatement
» avant le choc, & par la corde *t A*,
» pour avoir ſon mouvement, après le
» choc. Il faut chercher par la même
» méthode les quantités de mouve-
» ment qu'ont avant & après le choc,
» deux corps qu'on a laiſſé tomber en
» même tems de deux points différens,
» & trouver par la comparaiſon de ces
» mouvemens les effets du choc. C'eſt
» ainſi, qu'en faiſant mes expériences
» ſur des pendules de dix pieds de
» long, tant avec des corps égaux
» qu'avec des corps inégaux, que je
» laiſſois tomber de fort loin, de la
» diſtance, par exemple, de 8, 12,
» 16 pieds, j'ai trouvé, ſans avoir erré
» dans mes meſures de la quantité de
» trois doigts, que les changemens
» que le choc direct fait en ſens con-
» traires, aux mouvemens des corps,
» étoient égaux; & par conſéquent que

» l'action étoit toujours égale à la réac-
» tion, &c.

ECLAIRCISSEMENS.

Voilà le texte de Neuton, & voici maintenant les éclairciſſemens que je me ſuis engagé de vous donner. Si un corps tombe de *R* en *A*, Fig. 9. dans un milieu non réſiſtant, ſa viteſſe eſt, comme on ſçait, égale à celle qu'il auroit acquiſe en tombant d'une hauteur égale à celle de *R A*. Mais comme le milieu réſiſte ici, on peut ſuppoſer la viteſſe du corps en *A*, égale à celle qu'il auroit acquiſe en tombant dans un milieu non réſiſtant par un arc $rA < RA$.

Arrivé en A, ſi le milieu ne réſiſtoit point dans la branche *A M*, le corps remonteroit par un arc $A\rho = Ar$; mais la réſiſtance du milieu fait qu'il ne remonte que juſqu'en *N*; de *N* il deſcend en *A*, où l'on ſuppoſe qu'il ait

une viteſſe égale à celle qu'il eût acquiſe en tombant par un arc $nA < NA$ dans un milieu non réſiſtant, & au lieu de remonter par l'arc $Ay = An$, la réſiſtance du milieu ne lui permet de remonter qu'en V.

Cela poſé, l'arc RV exprime les retardations produites par la réſiſtance du milieu dans toutes les oſcillations dont je viens de parler. Mais ces oſcillations étant toutes plus petites les unes que les autres, pour avoir la rétardation de chacune d'elles en particulier, il faudroit partager inégalement l'arc RV; & comme ces oſcillations ſont au nombre de quatre, la retardation pour la premiere oſcillation eſt plus grande que la quatriéme partie de RV; & cette quatriéme partie, trop grande pour la retardation de la quatriéme oſcillation. Mais il eſt un point S d'où le corps tombant juſqu'en A, la quatriéme partie de

RV,

RV exprimera exactement la retardation pour l'arc SA.

Cherchons ce point S. Pour le trouver soit $RA = 1$; $RV = 4b$; $SA = x$. en supposant les retardations proportionnelles aux arcs parcourus, on aura Rr retardation de l'arc parcouru $RA = \frac{b}{x}$; & $A\rho$ second arc $= Ar = RA - Rr = 1 - \frac{b}{x}$; de même ρN retardation de l'arc $A\rho = (1 - \frac{b}{x}) \times \frac{b}{x} = \frac{b}{x} - \frac{bb}{xx}$. Donc AN 3e arc $= A\rho - \rho N = 1 - \frac{2b}{x} + \frac{bb}{xx}$; & la retardation Nn de l'arc $AN =$ $\left(1 - \frac{2b}{x} + \frac{bb}{xx}\right) \times \frac{b}{x} = \frac{b}{x} - \frac{2bb}{xx} + \frac{b^3}{x^3}$. Donc $Ay = An = AN - Nn$ quatriéme arc $= 1 - \frac{3b}{x} + \frac{3bb}{xx} - \frac{b^3}{x^3}$. Donc Vy retardation du quatriéme arc $= \frac{b}{x} - \frac{3bb}{xx} + \frac{3b^3}{x^3} - \frac{b^4}{x^4}$.

reste $x^4 - x^3 + \frac{3bxx}{2} = 0$, ou $x^2 - x + \frac{3b}{2} = 0$, équation dont la racine est $x = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{3b}{2}}$. Mais $\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{3b}{2}}$ est à peu près $\frac{1}{2} - \frac{3b}{2}$; donc x est à peu près $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3b}{2} = 1 - \frac{3b}{2}$.

Remarques sur cette approximation.

Remarquez 1°. Que $- bbxx + \frac{b^3}{4} < 0$; parce que $x > b$, d'où il s'ensuit que $x^4 - x^3 + \frac{3bxx}{2} > 0$. Donc $x > \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{3b}{2}}$. Mais $\frac{1}{2} - \frac{3b}{2}$ est un peu plus grand que $\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{3b}{2}}$; donc en mettant $\frac{1}{2} - \frac{3b}{2}$ pour $\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{3b}{2}}$, on rend à x à peu près autant qu'on lui avoit ôté. D'où il suit que cette approximation est aussi simple & aussi exacte qu'on le puisse désirer;

dans la suppofition que les retardations sont comme les arcs & non comme les quarrés des arcs.

2°. Que les retardations $\frac{b}{x}$; $\frac{b}{x} - \frac{bb}{xx}$; &c. sont en progression géométrique.

3°. Que pour résoudre exactement l'équation $\frac{4b}{x} - \frac{6bb}{xx} + \frac{4b^3}{x^3} - \frac{b^4}{x^4} = 4b$; on eût fait $1 - \frac{4b}{x} + \frac{6bb}{xx} - \frac{4b^3}{x^3} + \frac{b^4}{x^4} = 1 - 4b$. Donc $1 - \frac{b}{x} = \sqrt[4]{1-4b}$ ou $x = \frac{b}{1-\sqrt[4]{1-4b}}$.

4°. Que pour trouver le lieu V; on a $st. tu :: 2.3$, & que $tu = sr$. D'où il s'ensuit que $su. sr :: 5.3$. Soit donc $As = 1$, $sr = x$, on a $Au = 1 + \frac{5x}{4}$; $Ar = 1 - x$. Or Au est à Ar à peu près comme $AV. AR$. Donc si l'on fait $AV. AR :: m. n$, on aura $m. n :: 1 + \frac{5x}{3}, 1 - x$ Donc $n + \frac{5xn}{3} =$

$m - mx$. Donc $x = \frac{m-n}{m+\frac{5n}{3}} = \frac{3 \times \overline{m-n}}{3m+5n} \times As$ parce qu'on a ſuppoſé $As = 1$.

On peut encore chercher ce point V par expérience ; en laiſſant tomber le pendule d'un point V juſqu'à ce qu'il revienne en un point r, dont la diſtance sr au point s ſoit $= su \times \frac{3}{5}$, ou enfin on peut prendre ſimplement $st = \frac{As}{AS} \times ST$.

Voilà, ce me ſemble, tout l'endroit de Neuton ſur les rétardations du pendule cauſées par la réſiſtance de l'air, aſſez bien défriché. D'où il paroît s'enſuivre que cet Auteur ſuppoſe les retardations comme les arcs, au lieu que nous les trouvons par les propoſitions précédentes, comme les quarrés des arcs.

Vous m'objecterez ſans doute que

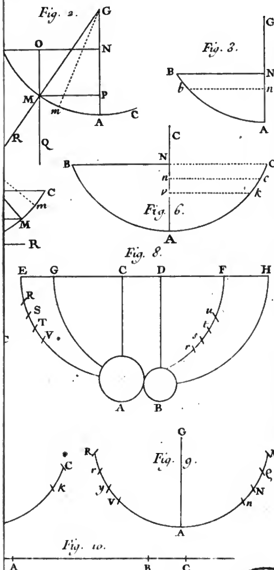
Neuton a l'expérience pour lui ; & que c'eſt d'après cette hypothèſe * qu'il a trouvé que l'action eſt toujours égale à la réaction ; & que, ſi, par exemple le corps *A*, après avoir choqué le corps *B* en repos avec 9 degrés de mouvement, continuoit d'aller avec deux ; le corps *B* partoit avec ſept degrés ; que, ſi les corps ſe choquoient en ſens contraires, *A* avec 12 degrés de mouvement, & *B* avec 6, & qu'*A* ſe refléchit avec 2 ; *B* ſe réfléchiſſoit avec 8, &c.

Je vous répondrai que, quoiqu'on ne ſe ſoit jamais aviſé de douter ni de l'exactitude, ni de la bonne foy de Neuton, cela n'a pas empêché qu'on n'ait réitéré ſes Expériences ſur les

* *Ut ſi corpus* A *incidebat in corpus* B *quieſcens cum novem partibus motûs, & amiſſis ſeptem partibus pergebat poſt reflexionem cum duabus ; corpus* B *reſiliebat cum partibus iſtis ſeptem. Si corpora obviam ibant*, A *cum duodecim partibus &* B *cum ſex, & redibat* A *cum duabus ; redibat* B *cum octo, factâ &c.*

couleurs : Pourquoi n'en feroit-on pas autant dans cette occasion-ci, où cet Auteur est parti d'une hypothèse que le calcul contredit évidemment, & où il étoit d'autant plus facile de se tromper, que les vitesses sont représentées par des quantités dont les différences sont très-petites, sçavoir les cordes des arcs parcourus devant & après les retardations.

Si vous trouvez que ce ne soit pas assez accorder au grand nom de Neuton, j'en suis fâché ; pour moi, je ne puis lui accorder davantage : J'ai pour Neuton toute la déférence qu'on doit aux hommes uniques dans leur genre ; j'incline fort à croire qu'il a la vérité de son côté ; mais encore est il bon de s'en assurer. J'invite donc tous les amateurs de la bonne Physique à recommencer ses Expériences, & à nous apprendre si les rétardations sont telles que Neuton paroît les avoir sup-


Fig. 2.
G
O
N
M
P
m
A
C
R
Q
Fig. 3.
G
B
N
b
n
A
C
B
N
C
n
c
ν
k
Fig. 6.
A
C
m
M
R
Fig. 8.
E
G
C
D
F
H
R
S
T
V
u
t
s
r
A
B
G
R
M
C
r
ϱ
Fig. 9.
y
N
k
V
n
A
Fig. 10.
A
B
C

& tirée de l'autre par un poids, eſt auſſi tenduë que ſi elle étoit tirée à ſes deux extrémités par deux poids égaux.

Quatriéme Expérience. Conſtruire un Harmonometre, ou un Orgue ſur lequel on puiſſe jouer, ou même compoſer toutes pieces de Muſique, & éprouver à chaque inſtant ſon harmonie.

Cinquiéme Expérience. S'aſſurer ſi les rétardations que l'air fait au moument des pendules, ſont comme les arcs ou comme les quarrés des arcs, & recommencer les Expériences de Neuton ſur le choc des corps.

TABLE DES MATIERES.

PREMIER MEMOIRE.

SECOND MEMOIRE.

TROISIE'ME MEMOIRE.

QUATRIE'ME MEMOIRE.

CINQUIE'ME MEMOIRE.

Fin de la Table des Matieres.

De l'Imprimerie de J. CHARDON. 1748.





